ELEMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA

MATERIAL DIDÁCTICO

Matemáticas

nº 5

José Manuel Gutiérrez Jiménez

Víctor Lanchares Barrasa

ELEMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA
SERVICIO DE PUBLICACIONES
2010

Edita: Universidad de La Rioja. Servicio de Publicaciones
Diseño de portada: Universidad de La Rioja. Servicio de Comunicación
ISBN 978-84-693-6451-2
Impreso en España - Printed in Spain

Prólogo

Estas notas son el fruto de varios años de docencia impartiendo la asignatura *Matemáticas III*, de la titulación en Ingeniería Industrial de la Universidad de La Rioja. El contenido de esta asignatura trata sobre la *Matemática Discreta*, la parte de las Matemáticas dedicada al estudio de las conjuntos discretos.

Para precisar el concepto de «discreto», sin entrar en definiciones rigurosas, podemos consultar el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española. Aquí encontramos que una cantidad discreta es aquella que consta de unidades o partes separadas unas de otras, como los árboles de un monte, los soldados de un ejército, los granos de una espiga, etc. Lo discreto puede verse como lo contrario a lo continuo, que el diccionario nos define de la siguiente forma: una cantidad continua es la que consta de unidades o partes que no están separadas unas de otras, como la longitud de una cinta, el área de una superficie, etc. Dicho de otro modo, lo discreto se puede contar y lo continuo se puede medir. Hablamos de contar el número de soldados, pero no de contar la longitud de una cinta. Lo mismo se diría a la inversa, hablamos de medir la longitud de una cinta, pero no de medir el número de soldados. Aunque medir surge de una generalización del concepto de contar, entendemos cosas distintas. Al medir presuponemos que se puede obtener cualquier valor, pero no al contar.

Así, ligado al concepto de discreto aparece el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, cuyos elementos nos resultan familiares, ya que van asociados a la idea de contar. Podríamos contar un número finito de cosas, pero también un número infinito de ellas. Podemos hablar entonces de un infinito asociado a los números naturales, que se llama infinito numerable, a diferencia de otros infinitos como el de los números reales $\mathbb{R}$. Para aclarar un poco más esta idea podemos pensar en la representación de los números reales como los puntos de una recta. Una característica de este conjunto de números es que no existen huecos entre ellos, entre dos números reales cualesquiera existe una infinidad de números reales. Sin embargo, los números naturales están uniformemente espaciados en esa imaginaria recta. Por ejemplo, entre el 1 y el 2 hay un salto de una unidad y no existen otros números naturales comprendidos entre ellos. Esta es la diferencia entre los números naturales $\mathbb{N}$ y los números reales $\mathbb{R}$, entre las Matemáticas de lo discreto y las Matemáticas de lo continuo, entre la Matemática Discreta y el Cálculo.

La Matemática Discreta engloba varias disciplinas: lógica proposicional, álgebra de Boole, combinatoria, teoría de conjuntos, estructuras algebraicas, teoría de autómatas finitos, grafos y árboles, etc. Aunque estas áreas no formaban un cuerpo estructurado, el auge de la informática y todo lo relacionado con los procesos digitales, han convertido a la Matemática Discreta en una las ramas de la Matemática de más interés. Prueba de ello es que aparece en la mayoría de los planes de estudio de las enseñanzas de Matemáticas e Ingeniería. Otros indicativos que dan fe de la vitalidad de la Matemática Discreta es el número de publicaciones recientes (en papel o digitales) sobre cualquiera de las disciplinas citadas anteriormente o la amplitud y variedad de sus aplicaciones. Como muestra, se pueden consultar las páginas dedicadas a la Matemática Discreta en la enciclopedia virtual *Wikipedia*, [26], [27] o la correspondiente página del proyecto *MathWorld*, [28], o cualquiera de las numerosas referencias y enlaces que en ellas aparecen.

Las notas que presentamos a continuación sirven de iniciación a algunas de las ramas englobadas dentro de la Matemática Discreta, fundamentalmente las técnicas para contar y la teoría de grafos y árboles. Somos conscientes de que el texto es incompleto pues no incluye algunos temas tan atractivos como la aritmética modular y sus aplicaciones en criptografía. No obstante, la selección de temas incluídos en este libro tiene gran interés y numerosas aplicaciones. Además, se ha pretendido escribir un texto autocontenido y que no requiera al lector de conocimientos matemáticos profundos. Se ha hecho un esfuerzo por presentar los temas de forma sencilla, pero rigurosa. Cada capítulo comienza introduciendo los resultados teóricos, salpicados de numerosos ejemplos. Además, cada capítulo tiene un apartado con problemas resueltos y, como en cualquier libro de Matemáticas, al final de cada tema hay una colección de problemas propuestos.

El capítulo inicial tiene por objeto introducir las nociones básicas de la Aritmética. En concreto, se presentan los números enteros y sus propiedades elementales. Aunque se comienza con conceptos realmente básicos, se obtienen resultados y aplicaciones que ya no resultan evidentes, como la demostración por inducción o las consecuencias que se deducen del algoritmo de la división, como por ejemplo la resolución de ecuaciones diofánticas.

En el segundo capítulo se hace un repaso a la combinatoria, con los principios básicos de enumeración y las técnicas más clásicas (variaciones, combinaciones, permutaciones, etc.). Una parte importante de este capítulo es la amplia colección de problemas, tanto resueltos como propuestos, que el lector puede encontrar.

En los capítulos tres y cuatro se presentan técnicas de enumeración más elaboradas, como las basadas en funciones generadoras y relaciones de recurrencia. Su aplicación más inmediata es la construcción de algoritmos para resolver de manera eficaz numerosos problemas, como pueden ser los de clasificación y búsqueda [13, 16, 17].

El capítulo quinto comienza con una introducción a la terminología y a los elementos básicos de la teoría de grafos. Contiene también alguno de los problemas clásicos de dicha teoría, como la existencia de circuitos eulerianos o ciclos hamiltonianos, los grafos planos y sus aplicaciones, o la coloración de grafos.

Finalmente, en el capítulo seis, se analizan los árboles, un tipo particular de grafos con una estructura particularmente simple y para los que existen resultados específicos, no aplicables a un grafo en general. A pesar de su aparente sencillez, los árboles tienen un gran número de aplicaciones, que van desde los algoritmos de búsqueda y clasificación de la información hasta problemas de optimización en investigación operativa.

En cuanto a las referencias, no hemos pretendido dar un listado exhaustivo de textos relacionados con la Matemática Discreta. Como hemos comentado anteriormente, se trata de una extensa y activa rama de las Matemáticas, donde podemos encontrar tanto textos clásicos, publicaciones de divulgación o artículos de investigación. La bibliografía que hemos incluido al final del texto ha sido seleccionada simplemente por nuestra experiencia personal: son los libros que hemos manejado para preparar e impartir las clases. En cuanto a los libros clásicos, que podrían considerarse como libros de texto para seguir un curso de Matemática Discreta, podemos destacar los de Biggs [2], Foulds [8], García Merayo [10], Grimaldi [14], Kalmanson [15], Rosen [23] o Tucker [24]. Hemos citado también otras publicaciones, más enfocadas a apoyar la docencia relacionada con la Matemática Discreta, como [4], [6], [9] o [11].

Las referencias electrónicas que hemos incluido son una pequeña muestra de lo que el lector puede encontrar por su cuenta buscando en Internet. Una lista más amplia de referencias electrónicas puede encontrarse en [9].

Por último no debemos olvidarnos de aquellas personas que de un modo u otro han contribuído a que estas notas sean una realidad. Especialmente Mari Carmen Mínguez, cuyas notas manuscritas de la asignatura de Matemática Discreta para la Licenciatura en Matemáticas han sio el embrión de lo que aquí se presenta. Juan Luis Varona, por sus sugerencias y su inestimable ayuda en la resolución de problemas relacionados con el LaTeX. José Luis Ansorena, Manuel Bello, Óscar Ciaurri y Pilar Benito, quienes, sin saberlo, han sido fuente de inspiración para alguno de los problemas que se incluyen. Finalmente, el resto de compañeros del Departamento de Matemáticas y Computación por hacer nuestro trabajo agradable.

Los autores

Logroño, julio de 2010

Índice general

Capítulo 1

Aritmética elemental

1.1. Introducción

Contar y calcular son actualmente dos actividades que forman parte del quehacer cotidiano de cualquier persona. Sin embargo, el origen de estas actividades, se pierde en la historia de los tiempos, al igual que ocurre con el origen de los números, la principal herramienta para contar y calcular. Ha sido necesario el esfuerzo de muchísima gente, junto con siglos de pruebas, dudas y descubrimientos para que los sistemas de numeración que empleamos se hallan afianzado. En la actualidad, los números forman parte del patrimonio cultural de las personas y, con mayor o menor profundidad, todo el mundo tiene una idea de qué son los números y para qué se utilizan.

Ahora bien, desde un punto de vista matemático, nos encontramos con que hay diversos tipos de números, cada uno de ellos, con peculiaridades propias. Así, entre los conjuntos de números que se usan con más frecuencia están:

1. Los *números naturales*. Se denotan con el símbolo $\mathbb{N}$ y son los que se pueden usar para contar los elementos de un conjunto:
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$
Algunos autores consideran los números naturales como el conjunto
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$
De hecho, ésta es la definición que incluye el diccionario de la Real Academia Española. La inclusión del cero dentro de los números naturales es, por tanto, una cuestión de criterio no universalmente establecida.

2. Los *números enteros*. Son una extensión de los números naturales, que incluye a los números negativos y, ahora sin lugar a dudas, al cero:
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

3. Los *números racionales*. Un número racional es un cociente de dos números enteros con denominador distinto de cero. Al conjunto de los números racionales se le denota con el símbolo $\mathbb{Q}$.

4. Los *números reales*, $\mathbb{R}$. De una manera intuitiva, podemos identificar los números reales con los puntos de una recta sin principio ni final. Un número real x admite una expresión decimal de la forma $x = n.d_1d_2d_3\ldots$ donde n es un número entero y cada d_i es un elemento del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. La sucesión de dígitos $d_1d_2d_3\ldots$ puede ser infinita y no se admite que a partir de una posición aparezcan infinitos nueves. Existen definiciones rigurosas del conjunto de los números reales (construcciones axiomáticas, por cortaduras de Dedekind, etc.) pero escapan a los contenidos de este curso.

El primer capítulo de este libro comienza con unas propiedades elementales de los números enteros $\mathbb{Z}$. La mayoría de estas propiedades no requieren de ningún esfuerzo para su comprensión y sólo una, el conocido como *axioma del buen orden*, requiere de una dedicación especial. Este principio es el que diferencia básicamente al conjunto de los números enteros de otros conjuntos de números como los reales.

Aunque se parte de conceptos muy sencillos, se llega a la obtención de resultados que ya no resultan evidentes o al desarrollo de técnicas con un gran número de aplicaciones. En concreto, se dan las bases de la demostración por inducción, que permite la prueba rigurosa de diversas fórmulas. Entre las técnicas desarrolladas, destaca el algoritmo de la división y sus interesantes aplicaciones como por ejemplo, la obtención del máximo común divisor de dos números enteros o la resolución de ecuaciones diofánticas.

1.2. El conjunto de los números enteros

El conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$, goza de una serie de propiedades que podemos dividir en dos tipos:

- Aritméticas: tienen en cuenta las operaciones suma $(+)$ y producto $(\cdot)$.
- De orden: se deducen de la relación $\leq$.

Propiedades aritméticas.

P1.- $a+b$ y $a \cdot b$ son elementos de $\mathbb{Z}$.

P2.- Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, $a+b=b+a$ y $a \cdot b = b \cdot a$.

P3.- Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a+b)+c = a+(b+c), (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

P4.- $\exists\, 0, 1 \in \mathbb{Z}$ tal que $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a+0=a$, $a \cdot 1 = a$.

P5.- Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

P6.- Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe un único entero $-a \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = 0$.

P7.- Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a \cdot c \Longrightarrow b = c$.

Propiedades de orden.

P8.- $a \leq a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

P9.- Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

P10.- Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

P11.- Si $a \leq b$, entonces $a + x \leq b + x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.

P12.- Si $a \leq b$ y $0 \leq c$, entonces $a \cdot c \leq b \cdot c$.

A partir de las propiedades aritméticas y de orden se pueden deducir otras muchas propiedades que nos son familiares, como las siguientes:

Ejemplo 1.1.- $x \cdot 0 = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{Z}$.

Podemos seguir el siguiente razonamiento:

$x \cdot (0+0) = x \cdot 0$, por la propiedad $P4$.

$x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0$, por la propiedad $P5$.

$-x \cdot 0 + (x \cdot 0 + x \cdot 0) = -x \cdot 0 + x \cdot 0 = 0$, por las propiedades $P4$ y $P6$.

$(-x \cdot 0 + x \cdot 0) + x \cdot 0 = 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0 = 0$, por las propiedades $P2$, $P3$, $P4$ y $P6$. ■

Ejemplo 1.2.- *Si* $a \leq b$, *entonces* $-b \leq -a$.

El razonamiento ahora es como sigue: $a \leq b \Longrightarrow a + (-a-b) \leq b + (-a-b)$, por la propiedad $P11$. Aplicando las propiedades aritméticas $P2$, $P3$, $P4$ y $P6$ resulta $-b \leq -a$. ■

Estas 12 propiedades no sólo las verifican los números enteros. También se cumplen para los números racionales $\mathbb{Q}$ y reales $\mathbb{R}$. ¿Qué es, entonces, lo que diferencia a los números enteros del resto de números? La diferencia radica en una propiedad que se conoce como *principio o axioma del buen orden*. Antes de enunciarlo, veamos un par de definiciones.

Definición 1.1.- *Sea $X \subset \mathbb{Z}$ un subconjunto de números enteros. Decimos que $b \in \mathbb{Z}$ es una* cota inferior *de X si $b \leq x$ para todo $x \in X$. Entonces decimos que X es un* conjunto acotado inferiormente.

Algunos conjuntos no tienen cotas inferiores, como el conjunto de los enteros negativos ($\mathbb{Z}^-$). Otros conjuntos, como

$$\{-18, -27, -26, -15, -5, 5, 15, 24, 19, 6, 98, -23, 0, 7\}$$

sí tienen cotas inferiores. Por ejemplo -40 lo es. Sin embargo, vemos que -27 es la mayor cota inferior, ya que no se puede mejorar y, de hecho, pertenece al conjunto.

Definición 1.2.- *Una cota inferior b de un conjunto X tal que $b \in X$ recibe el nombre de* mínimo *de X.*

Ahora estamos en condiciones de enunciar la propiedad más importante de los números enteros, la que los distingue de otros conjuntos de números enteros como los racionales $\mathbb{Q}$ o los reales $\mathbb{R}$.

P13.- **Principio del buen orden**. Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ acotado inferiormente tiene mínimo.

Ejemplo 1.3.- *El conjunto de números racionales $\{1/n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$ tiene cotas inferiores pero no tiene mínimo.*

En efecto, basta con darse cuenta que 0 es la mejor cota inferior, pero no está en el conjunto. Es decir, este conjunto no tiene mínimo. ■

Esto nos proporciona una justificación de la idea intuitiva de los números enteros como un conjunto de puntos regularmente espaciados en una recta que se extiende infinitamente en ambas direcciones. En particular, nos dice que no podemos acercarnos a un entero más y más sin llegar a él. El hecho de que haya huecos entre los enteros nos lleva a decir que $\mathbb{Z}$ es discreto y es esta propiedad la que da el nombre a la *Matemática Discreta*.

Lo relevante del principio del buen orden no es sólo el hecho de que distingue el conjunto $\mathbb{Z}$ de otros conjuntos de números, sino que resulta de gran utilidad desde el punto de vista matemático. Este principio fundamenta distintas técnicas básicas, como la demostración por inducción.

1.3. El principio de inducción matemática

La inducción matemática es una poderosa herramienta que permite demostrar cuándo un conjunto infinito de afirmaciones (tantas como números naturales) se cumple. Intuitivamente, está basado en una especie de «efecto dominó», en el cual, si colocamos las fichas en fila de manera que si una de ellas cae, tira a la siguiente y tiramos la primera ficha, entonces todas caen.

Teorema 1.1.- (Principio de inducción matemática) *Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ un subconjunto de los números naturales tal que:*

i) $1 \in S$.

ii) Si $k \in S$, entonces $k+1 \in S$.

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Demostración. La demostración se realiza por reducción al absurdo. Supongamos que $S \neq \mathbb{N}$, entonces se cumple que

$$\mathbb{N} \setminus S = \{n \in \mathbb{N}; n \notin S\} \neq \emptyset,$$

es decir, hay elementos en $\mathbb{N}$ que no están en S. Puesto que $\mathbb{N} \setminus S$ es un conjunto de números naturales, está acotado inferiormente y, por el principio del buen orden, tiene mínimo. Llamemos a ese mínimo m_0. Notemos que $m_0 \notin S$.

Es evidente que $m_0 \neq 1$, ya que por *i)*, $1 \in S$. Por lo tanto $m_0 - 1 \geq 1$. Como, m_0 es el mínimo de $\mathbb{N} \setminus S$, entonces $m_0 - 1 \in S$ y, por *ii)*, $m_0 \in S$. Esto es absurdo, pues tenemos que $m_0 \in S$ y $m_0 \notin S$. En consecuencia, hemos partido de un supuesto falso, esto es, suponer que $S \neq \mathbb{N}$. ■

La consecuencia inmediata del principo de inducción matemática deriva en una técnica para la demostración de proposiciones en las que aparece una variable n, que representa un número natural. De esta forma, si la proposición es cierta para $n = 1$ y si se supone cierta para un cierto k también lo es para $k + 1$, entonces la proposición es cierta para cualquier $n \geq 1$.

Ejemplo 1.4.- *Prueba por inducción que* $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

En primer lugar debemos verificar *la base de la inducción*, esto es, que la fórmula que debemos probar es cierta para $n = 1$, es decir, cuando sólo hay un sumando. Pero esto es obvio, pues

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1.$$

Ahora tenemos que probar *el paso inductivo*, esto es, tenemos que ver que si la fórmula se cumple para $n = k$, también se cumple para $n = k + 1$. En este caso, suponemos cierto que

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \tag{1.1}$$

¿Se cumple entonces que $1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \dfrac{(k+1)(k+1+1)}{2}$?

Teniendo en cuenta (1.1), resulta

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1).$$

Operando llegamos finalmente a

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Luego la fórmula también es cierta para $n = k + 1$ y, por el principio de inducción matemática, es válida para cualquier $n \geq 1$. ■

Es importante comprobar los dos pasos de la inducción matemática. A veces, se tiende a prescindir del primer paso (la base de la inducción) y uno se centra sólo en el paso inductivo, que suele ser el más complicado. Esto puede llevar a errores, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5.- *Prueba que* $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$.

Si prescindimos de la base de la inducción, y pasamos directamente al paso inductivo, probaremos que si la fórmula se cumple para un determinado k, también es cierta para $k + 1$. En este caso, partimos de

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k^2+k+2}{2} \tag{1.2}$$

y queremos probar que

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2}.$$

Partiendo de (1.2) tenemos que

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2}{2} + (k+1)$$

y operando llegamos a

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2}.$$

En resumen, el paso inductivo se cumple, pero no hemos verificado la base de la inducción. De hecho, no se cumple y la fórmula no es cierta cualquiera que sea el valor de n. ∎

La base de la inducción no tiene por qué ser necesariamente $n = 1$, pudiendo ser cualquier entero n_0 tanto positivo como negativo. Así, como consecuencia del Teorema 1.1 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.2.- (Principio de inducción matemática generalizado) *Sean $\{P_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, un conjunto de propiedades cuya certeza queremos probar. Si:*

i) *La propiedad es cierta para $n = n_0$.*

ii) *Si la propiedad es cierta para $n = k$ también lo es para $n = k + 1$.*

Entonces la propiedad es cierta para $n \geq n_0$.

Ejemplo 1.6.- *Demuestra por inducción que todo número mayor o igual que 8 puede escribirse como suma de treses y cincos.*

En este caso la base de la inducción es $n = 8$. Así, se tiene

$$8 = 5 + 3$$

y, por tanto, la propiedad es cierta para $n = 8$.

Supongamos que la propiedad se cumple para un cierto número k, es decir, k se puede poner como suma de treses y cincos. Esto quiere decir que existen a y b enteros mayores o iguales que 0 tales que

$$k = a \cdot 3 + b \cdot 5.$$

Siendo esto cierto, ¿se puede poner $k + 1$ como suma de treses y cincos? Distiguiremos dos casos, $b > 0$ y $b = 0$.

Si $b > 0$ en la descomposición de k tenemos por lo menos un 5 y podremos poner

$$k = a \cdot 3 + (b-1) \cdot 5 + 5.$$

Por lo tanto

$$k + 1 = a \cdot 3 + (b-1) \cdot 5 + 6 = (a+2) \cdot 3 + (b-1) \cdot 5.$$

Si $b = 0$, tenemos que k es múltiplo de 3, es decir $k = a \cdot 3$. Pero como $k \geq 8$, entonces $k = 9, 12, 15, 18, \ldots$, lo que quiere decir que $a \geq 3$. De esta forma podemos escribir

$$k = (a-3) \cdot 3 + 9$$

y, en consecuencia

$$k + 1 = (a-3) \cdot 3 + 10 = (a-3) \cdot 3 + 2 \cdot 5.$$

Por tanto, si k cumple la propiedad también la cumple $k + 1$. Puesto que la base de la inducción está probada para $n = 8$, podemos concluir que todo número mayor o igual que 8 se puede expresar como suma de treses y cincos. ∎

1.4. Divisibilidad. El algoritmo de la división.

Una de las ideas más clásicas en la teoría de números es la de divisibilidad, que establece cuándo un número entero a se puede dividir por otro entero no nulo b dando lugar a un resto cero. En esta sección analizamos el concepto de divisibilidad y otros relacionados con él, como número primo o máximo común divisor.

Definición 1.3.- *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$. Se dice que b* divide a *a, y se escribe $b|a$[1], si existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b \cdot c$. Cuando esto ocurre, se dice que b es un* divisor *de a, que a es un* múltiplo *de b o que a es* divisible *por b.*

Ejemplo 1.7.- *Prueba que $n^2 + 3n$ es divisible por 2.*

Basta ver que $n^2 + 3n$ se puede factorizar y escribirse como

$$n^2 + 3n = n(n + 3).$$

Si n es par, entonces el número resultante es divisible por 2. Si n es impar, entonces $n + 3$ tiene que ser par y, por tanto, de nuevo el número resultante es divisible por 2. ■

Ejemplo 1.8.- *Prueba que si d divide a n y c divide al cociente n/d, entonces c divide a n y d divide al cociente n/c.*

Como d divide a n, entonces existe k tal que $n = k \cdot d$, por lo tanto $n/d = k$.

Por otra parte, como c divide al cociente n/d se tiene que $k = n/d = c \cdot k'$. Por lo tanto $n = k \cdot d = k' \cdot d \cdot c$. En consecuencia, c divide a n. Además, como $n/c = k' \cdot d$ resulta que d divide al cociente n/c. ■

A partir de la definición de divisibilidad, se pueden clasificar los números enteros positivos en dos clases. Los que llamaremos números primos, y el resto, que llamaremos compuestos.

Definición 1.4.- *Un número natural $p \geq 2$ se dice que es* primo *si sus únicos divisores son 1 y p. Un número natural que no es primo se llama* compuesto.

Es interesante resaltar que, como consecuencia del principio del buen orden, si un número es compuesto, entonces existe un primo que lo divide. Existe además un gran número de resultados y propiedades relacionados con los números primos. Entre ellos destacamos dos resultados atribuidos a Euclides (siglo IV a. C.). El primero asegura que el número de primos es infinito. El segundo, conocido como *teorema fundamental de la aritmética*, establece que cualquier número entero positivo se puede escribir de manera única como producto de números primos. Este tipo de resultados se enmarca dentro de una rama de las Matemáticas conocida como *Teoría de Números.*

A partir del concepto de divisibilidad llegamos a definir el *máximo común divisor* de dos enteros a y b, que denotaremos por m.c.d.(a, b).

Definición 1.5.- *Dados dos enteros a y b, decimos que d es el* máximo común divisor *de a y b si cumple*

i) d *divide a* a *y* d *divide a* b.

ii) *Si* c *divide a* a *y* c *divide a* b, *entonces* c *divide a* d.

iii) $d \geq 1$.

Definición 1.6.- *Si a y b son dos enteros con m.c.d.$(a, b) = 1$, diremos que los números a y b son* primos entre sí, *o* relativamente primos.

[1] Obsérvese que la notación $b|a$ es parecida a la notación b/a. Ahora bien, la segunda denota al cociente entre a y b mientras que la primera indica que b es un divisor de a. En lo sucesivo emplearemos ambas notaciones por lo que habrá que prestar atención para evitar confusiones.

El principio del buen orden garantiza la existencia y unicidad del máximo común divisor de dos números. Además, podemos encontrar un algoritmo general que permite calcularlo. Este algoritmo se conoce como *Algoritmo de Euclides* y está basado en el algoritmo de la división y en la siguiente propiedad derivada de la divisibilidad.

Lema 1.3.- *Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(b \cdot x + c \cdot y)$, para x e y cualesquiera.*

Demostración. Como $a|b$ entonces $b = k \cdot a$. Análogamente, $c = k' \cdot a$. Por lo tanto

$$b \cdot x + c \cdot y = k \cdot a \cdot x + k' \cdot a \cdot y = a \cdot (k \cdot x + k' \cdot y).$$

Es decir, $a|(b \cdot x + c \cdot y)$. ■

El conocido como algoritmo de la división es otra consecuencia relevante del principio del buen orden. Aunque lleva el nombre de algoritmo, realmente es un resultado que establece cómo se realiza el proceso de división de dos números enteros. A continuación presentamos dicho algoritmo junto con alguna de sus aplicaciones más interesantes.

Teorema 1.4.- (Algoritmo de la división) *Dados dos enteros a y b, con $b > 0$, entonces existen $q, r \in \mathbb{Z}$ únicos tales que $a = q \cdot b + r$ con $0 \leq r < b$.*

Demostración. Si b divide a a, el resultado se sigue directamente, sin más que tomar $r = 0$. Supongamos, por tanto, que b no es un divisor de a. Consideramos el conjunto

$$S = \{a - tb; t \in \mathbb{Z}, a - tb > 0\}.$$

Se prueba que S no es vacío, ya que si $a > 0$, entonces tomando $t = 0$, se tiene que $a \in S$. Por otra parte, si $a \leq 0$, se toma $t = a - 1$ para obtener que $a - tb \in S$ ya que

$$a - tb = a(1 - b) + b > 0.$$

Para probar esta última igualdad se tiene en cuenta que $b > 0$, por lo que $1 - b \leq 0$ y $a(1 - b) \geq 0$.

Como S es un subconjunto de los números enteros positivos, está acotado inferiormente, luego el principio del buen orden garantiza la existencia de un mínimo que denotamos por r y que será de la forma $r = a - qb$ para algún $q \in \mathbb{Z}$. Entonces, si r fuera igual a b, se llegaría a que $a = (q+1)b$, lo que contradice el hecho de que b no es un divisor de a. Si r fuese mayor que b, es decir, $r = b + c$ para algún $c > 0$, entonces se tendría que $a - qb = r = b + c$. Por lo tanto, $c = a - (q+1)b$ sería un elemento de S (pues $c > 0$). Pero como $c < r$, se contradice ahora el hecho de que r sea el mínimo de S. Como las situaciones $r = b$ ó $r > b$ nos conducen a contradicciones, se sigue que $r < b$.

Hasta ahora hemos probado la existencia de un cociente q y un resto r tales que $a = qb + r$, con $r < b$. Falta por probar ahora la unicidad de dichos valores. Supongamos que existen dos pares (q_1, r_1) y (q_2, r_2) tales que $a = q_1 b + r_1$, con $0 \leq r_1 < b$, y $a = q_2 b + r_2$, con $0 \leq r_2 < b$. Entonces, $q_1 b + r_1 = q_2 b + r_2$ y, por tanto, $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Tomando módulos en dicha igualdad, se llega a que

$$b|q_1 - q_2| = |r_2 - r_1| < b$$

lo cual sólo se puede cumplir si $q_1 = q_2$. En consecuencia, $r_1 = r_2$, por lo que el cociente y el resto son únicos. ■

Como ya hemos comentado anteriormente, una de las primeras aplicaciones del algoritmo de la división es el algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor de dos enteros positivos.

Algoritmo 1.1.- (Algoritmo de Euclides) *Para calcular $d = m.c.d.(a, b)$, donde $0 < b < a$, mediante el algoritmo de la división obtenemos*

$$a = q \cdot b + r \Longrightarrow r = a - q \cdot b.$$

Por el lema 1.3, como d es un divisor de a y de b, resulta que d divide a r y, en consecuencia,

$$m.c.d.(a, b) = m.c.d.(b, r).$$

Como quiera que $0 \leq r < b$, la repetición de este procedimiento nos conduce al máximo común divisor, que será el último resto distinto de 0.

Tabla 1.1: Cálculo del máximo común divisor de dos enteros a y b mediante el algoritmo de Euclides y esquema por el cual es posible expresar éste mediante una combinación entera de a y b.

$$\begin{array}{r|l} 1\,232 & 344 \\ \hline 200 & 3 \end{array} \qquad 8 = 7 \cdot 344 - 12 \cdot (1\,232 - 3 \cdot 344) = 43 \cdot 344 - 12 \cdot 1\,232$$

$$\begin{array}{r|l} 344 & 200 \\ \hline 144 & 1 \end{array} \qquad 8 = 7 \cdot (344 - 200) - 5 \cdot 200 = 7 \cdot 344 - 12 \cdot \boxed{200}$$

$$\begin{array}{r|l} 200 & 144 \\ \hline 56 & 1 \end{array} \qquad 8 = 2 \cdot 144 - 5 \cdot (200 - 144) = 7 \cdot \boxed{144} - 5 \cdot 200$$

$$\begin{array}{r|l} 144 & 56 \\ \hline 32 & 2 \end{array} \qquad 8 = 2 \cdot (144 - 56 \cdot 2) - 56 = 2 \cdot 144 - 5 \cdot \boxed{56}$$

$$\begin{array}{r|l} 56 & 32 \\ \hline 24 & 1 \end{array} \qquad 8 = 32 - (56 - 32) = 2 \cdot \boxed{32} - 56$$

$$\begin{array}{r|l} 32 & 24 \\ \hline 8 & 1 \end{array} \qquad 8 = 32 - \boxed{24}$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & \boxed{8} \\ \hline 0 & 3 \end{array} \quad \longrightarrow \quad 8 = \text{ m.c.d.}(1\,232, 344) \text{ (último resto distinto de 0)}$$

En la tabla 1.1 podemos ver cómo emplear el algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor de dos números enteros, en concreto, m.c.d.$(1\,232, 344)$.

Además, el algoritmo de Euclides nos proporciona una forma constructiva de obtener el máximo común divisor de dos números como una combinación lineal entera de éstos.

Teorema 1.5.-(Identidad de Bézout) *Sean a y b dos números enteros con $b > 0$ y sea $d = m.c.d.(a, b)$, entonces existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $d = m \cdot a + n \cdot b$.*

Demostración. Apliquemos el algoritmo de Euclides

$$\begin{array}{rcl} a & = & q_1 \cdot b + r_1 \\ b & = & q_2 \cdot r_1 + r_2 \\ r_1 & = & q_3 \cdot r_2 + r_3 \\ & \vdots & \\ r_{n-2} & = & q_n \cdot r_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} & = & q_{n+1} \cdot r_n. \end{array}$$

Entonces $r_n = \text{m.c.d.}(a, b)$ por ser el último resto distinto de 0.

Procedamos ahora por un procedimiento de sustitución, marcha atrás, comenzando en la última división con resto.

$$\begin{aligned} d = r_n &= r_{n-2} - q_n \cdot r_{n-1} \\ &= r_{n-2} - q_n \cdot (r_{n-3} - q_{n-1} \cdot r_{n-2}) \\ &= r_{n-2} \cdot (1 + q_n \cdot q_{n-1}) - r_{n-3} \cdot q_n \\ &= \cdots = m \cdot a + n \cdot b. \end{aligned}$$

Así hemos conseguido escribir $d = \text{m.c.d.}(a, b)$ como una combinación lineal de a y b, ■

En la tabla 1.1 se muestra también un ejemplo de cómo se realiza este proceso.

Quizás, el procedimiento de obtener el máximo común divisor como combinación lineal entera de a y b resulte un poco engorroso. Sin embargo, puede construirse un algoritmo sencillo que da lugar a esta combinación basándose en el esquema recursivo dado por el Algoritmo de Euclides

$$r_i = r_{i-2} - q_i \cdot r_{i-1}. \tag{1.3}$$

Algoritmo 1.2.- (Algoritmo de Euclides abreviado) *Supongamos que para r_k se cumple que $r_k = m_k \cdot a + n_k \cdot b$. Así, si tenemos*

$$r_{i-2} = m_{i-2} \cdot a + n_{i-2} \cdot b,$$
$$r_{i-1} = m_{i-1} \cdot a + n_{i-1} \cdot b,$$

entonces, teniendo en cuenta la identidad (1.3)

$$r_i = m_i \cdot a + n_i \cdot b, \qquad m_i = m_{i-2} - q_i m_{i-1}, \quad n_i = n_{i-2} - q_i n_{i-1}.$$

Necesitamos entonces que la ecuación $r_k = m_k \cdot a + n_k \cdot b$ se cumpla para dos restos, que vamos a poner como a y b. En efecto, se tienen las relaciones triviales

$$1 \cdot a + 0 \cdot b = a, \qquad 0 \cdot a + 1 \cdot b = b,$$

por lo que cualquier resto se puede poner como combinación lineal entera de a y b.

Tabla 1.2: Método abreviado para calcular m.c.d.(a, b) mediante una combinación entera de a y b. En este caso $a = 1\,232$, $b = 344$ y m.c.d.$(1\,232, 344) = 8$, con $8 = -12 \cdot 1\,232 + 43 \cdot 344$.

r	m	n	q
1 232	1	0	
344	0	1	
200	1	−3	3
144	−1	4	1
56	2	−7	1
32	−5	18	2
24	7	−25	1
8	**−12**	**43**	1

Para ponerlo en forma de tabla podemos representar en una columna los restos, en otra el coeficiente m en otra n y en una cuarta el cociente q. Partiendo de las dos ecuaciones triviales, los elementos m y n de la siguiente fila serán la resta de los de la fila dos posiciones por encima menos q por los de la fila anterior (véase la tabla 1.2). Por ejemplo, en la tabla 1.2, la tercera fila (en lo que atañe a los coeficientes m y n) es igual a la primera menos 3 veces la segunda, pues 3 es el cociente de la primera división del algoritmo de Euclides, y así sucesivamente.

Una aplicación inmediata de la identidad de Bézout es que si a y b son primos entre sí, entonces existen m y n tales que $m \cdot a + n \cdot b = 1$. Este hecho es importante y tiene algunas aplicaciones interesantes, como se ve en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.9.- *Si $a|b \cdot c$ y m.c.d.$(a, b) = 1$ entonces $a|c$.*

Por ser m.c.d.$(a, b) = 1$, existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \cdot a + n \cdot b = 1$. Multiplicando esta indentidad por c resulta

$$m \cdot c \cdot a + n \cdot b \cdot c = c. \tag{1.4}$$

Por otra parte, como $a|b \cdot c$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b \cdot c = k \cdot a$ y sustituyendo en (1.4) se tiene

$$m \cdot c \cdot a + n \cdot k \cdot a = c$$

y por tanto $a|c$ ya que $c = a \cdot (m \cdot c + n \cdot k)$. ■

Una consecuencia del ejemplo anterior es que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Ejemplo 1.10.- *Prueba que no existen* a, b *enteros positivos tales que* $\sqrt{2} = a/b$ *y m.c.d.*$(a, b) = 1$*.*

Supongamos que $\sqrt{2} = a/b$ y m.c.d.$(a, b) = 1$. Elevando al cuadrado,

$$2 \cdot b^2 = a^2.$$

Como m.c.d.$(a, b) = 1$ entonces m.c.d.$(a^2, b^2) = 1$ y, por el ejemplo 1.9, $2|a^2$. Por lo tanto $2|a$ y podemos poner $a = 2 \cdot k$. Así, $a^2 = 4 \cdot k^2$ y entonces

$$2 \cdot b^2 = 4 \cdot k^2 \Longrightarrow b^2 = 2 \cdot k^2.$$

Repitiendo el mismo argumento que antes resulta que $2|b$. Pero esto contradice el hecho de que m.c.d.$(a, b) = 1$.

En consecuencia, la hipótesis de partida es falsa y $\sqrt{2}$ no es un número racional. ■

Otra aplicación interesante del algoritmo de la división (véase el Teorema 1.4) permite la representación de un número entero en una base de numeración $b \geq 2$. En efecto, podemos poner, para un entero $a > 0$

$$\begin{aligned}
a &= q_0 \cdot b + r_0,\\
q_0 &= q_1 \cdot b + r_1,\\
&\vdots\\
q_{n-1} &= q_n \cdot b + r_n, \quad (q_n = 0).
\end{aligned}$$

Notemos que, debido a que $0 \leq q_{k+1} < q_k$, en algún momento tenemos que encontrar un n para el que $q_n = 0$. Mediante sustituciones reiteradas, se tiene

$$\begin{aligned}
a &= q_0 \cdot b + r_0 = (q_1 \cdot b + r_1) \cdot b + r_0 = q_1 \cdot b^2 + r_1 \cdot b + r_0,\\
a &= q_2 \cdot b^3 + r_2 \cdot b^2 + r_1 \cdot b + r_0,\\
&\vdots\\
a &= r_n \cdot b^n + r_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + r_2 \cdot b^2 + r_1 \cdot b + r_0.
\end{aligned}$$

De esta forma pondremos $a = (r_n r_{n-1} \ldots r_2 r_1 r_0)_b$ y diremos que es la expresión de a en base b.

Ejemplo 1.11.- *Expresa* $4\,165$ *en base 7.*

Aplicando el algoritmo de la división,

$$\begin{array}{rr|lllll}
 & 4\,165 & 7 & & & & \\
\cline{3-3}
r_0 \to & 0 & 595 & \multicolumn{1}{|l}{7} & & & \\
\cline{4-4}
 & & r_1 \to 0 & 85 & \multicolumn{1}{|l}{7} & & \\
\cline{5-5}
 & & & r_2 \to 1 & 12 & \multicolumn{1}{|l}{7} & \\
\cline{6-6}
 & & & & r_3 \to 5 & 1 & \multicolumn{1}{|l}{7} \\
\cline{7-7}
 & & & & & r_4 \to 1 & 0
\end{array}$$

se obtiene que $4\,165 = (15\,100)_7 = 0 + 0 \cdot 7 + 1 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^4$. ■

Ejemplo 1.12.- *¿Qué número es* $(4\,165)_7$*?*

Operando en base 7, se obtiene de forma inmediata

$$(4\,165)_7 = 5 + 6 \cdot 7 + 1 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^3 = 1\,468. \quad ■$$

También pueden representarse fracciones en otras bases de numeración, así como números irracionales. Para ello basta tener en cuenta la notación posicional a la que estamos acostumbrados en base 10. En este sentido, si escribimos $1/4 = 0{,}25$, lo que queremos decir en realidad es que

$$\frac{1}{4} = 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}.$$

De esta forma, la coma no hace más que separar las potencias positivas de las potencias negativas de la base de numeración.

Consideremos una base de numeración b y una fracción M/N de forma que $M < N$ y M y N no tienen divisores comunes, entonces

$$\frac{M}{N} = \frac{M \cdot b}{N \cdot b}.$$

Por el algoritmo de la división $M \cdot b = q_{-1} \cdot N + r_{-1}$, por lo que

$$\frac{M}{N} = \frac{q_{-1} \cdot N + r_{-1}}{N \cdot b} = q_{-1} \cdot b^{-1} + \frac{r_{-1}}{N \cdot b}.$$

Repitiendo el procedimiento con $r_{-1}/N \cdot b$ llegamos a

$$\frac{M}{N} = q_{-1} \cdot b^{-1} + q_{-2} \cdot b^{-2} + \frac{r_{-2}}{N \cdot b^2}.$$

El proceso se repite hasta que $r_{-k} = 0$ ó hasta que $r_{-k} = r_{-j}$ con $j < k$. En el primer caso el número de cifras decimales es finito, mientras que en el segundo caso el número de cifras decimales es infinito, aunque éstas se repiten periódicamente.

Ejemplo 1.13.- *Representa* $1/3$ *en base 2.*

Aplicando el proceso explicado anteriormente:

$$\begin{array}{llll}
r_0 = 1 & \xrightarrow{\times 2} & 2 \,\big|\, \underline{3} & \\
 & & 2 \quad 0 & \rightarrow q_{-1} \\
 & \swarrow & & \\
\times 2 & & & \\
 & \searrow & & \\
 & & 4 \,\big|\, \underline{3} & \\
 & & 1 \quad 1 & \rightarrow q_{-2} \\
 & & \downarrow & \\
 & & \multicolumn{2}{l}{r_{-2} = r_0 = 1 \Longrightarrow \text{representación periódica infinita.}}
\end{array}$$

De esta forma, $\frac{1}{3} = 0,\overset{\frown}{01}_2$, donde $\frown$ indica que la secuencia 01 se repite infinitamente. ■

Para recuperar la fracción, a partir de su representación decimal en base b, podemos proceder de dos formas. La primera consiste en sumar las potencias negativas de b multiplicadas por el coeficiente correspondiente. Así,

$$\begin{aligned}
0,\overset{\frown}{01}_2 &= 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + \cdots \\
&= 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} + \cdots = 2^{-2}\left(1 + 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} + \cdots\right).
\end{aligned}$$

Para obtener la fracción, tenemos que sumar la serie

$$1 + 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} + \cdots$$

que es una progresión geométrica de razón 2^{-2} (cada sumando se obtiene multiplicando el anterior por la razón). Para sumar una progresión geométrica de razón r, con $|r| < 1$, basta ver que

$$\begin{array}{rcccccccl}
S & = & 1 & + & r & + & r^2 & + & r^3 + \cdots \\
rS & = & & & r & + & r^2 & + & r^3 + \cdots \\
\hline
S - rS & = & 1 & & & & & &
\end{array}$$

por tanto $S = 1/(1-r)$ y en nuestro caso

$$1 + 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} + \cdots = \frac{1}{1 - 2^{-2}} = \frac{4}{3},$$

por lo que

$$0,\overset{\frown}{01}_2 = 2^{-2}\frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

La otra forma de recuperar la fracción es darse cuenta que desplazar la coma decimal a la derecha una posición equivale a multiplicar por b. Por lo tanto, si $F = 0{,}\widehat{01}_2$ entonces

$$2^2F = 1{,}\widehat{01}_2 \Longrightarrow 2^2F - F = 1_2 = 1 \Longrightarrow F = \frac{1}{3}.$$

1.5. Ecuaciones diofánticas

Una de las aplicaciones más interesantes de las técnicas desarrolladas en las secciones anteriores es la resolución de las llamadas *ecuaciones diofánticas*. Las ecuaciones diofánticas son aquéllas que admiten únicamente soluciones enteras. Su nombre está ligado al del matemático griego del siglo III d. C. Diofanto de Alejandría, quien hizo un estudio pormenorizado de ellas en su libro *Arithmetica*.

Definición 1.7.- *Una* ecuación diofántica lineal *de n incógnitas es una ecuación de la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son números enteros conocidos y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números enteros a determinar.

Si nos centramos en ecuaciones de dos incógnitas, trataremos de encontrar todas las soluciones enteras posibles de la ecuación

$$a \cdot x + b \cdot y = c, \tag{1.5}$$

donde a, b y c son enteros conocidos.

La primera observación que debemos hacer es que este tipo de ecuaciones (1.5) tiene solución si y sólo si el máximo común divisor de a y b es un divisor de c. En efecto, sea m.c.d.$(a, b) = d$, entonces, por el lema 1.3, d divide a $a \cdot x + b \cdot y$. Por lo tanto, para que la ecuación (1.5) tenga solución, es necesario que d sea un divisor de c. Así pues, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que en la ecuación (1.5) se cumple m.c.d.$(a, b) = 1$. En caso contrario, basta dividir por el máximo común divisor.

Para encontrar las soluciones de una ecuación diofántica (1.5) se pueden seguir los siguientes pasos:

Paso 1.- Encontrar una solución particular de (1.5). Teniendo en cuenta la Identidad de Bézout (Teorema 1.5), existen m y n tales que $m \cdot a + n \cdot b = 1$. Multiplicando esta igualdad por c obtenemos una solución particular de la ecuación (1.5) de la forma:

$$x = c \cdot m, \qquad y = c \cdot n.$$

Paso 2.- Resolver la *ecuación homogénea asociada*:

$$a \cdot x + b \cdot y = 0. \tag{1.6}$$

Notemos que las soluciones enteras de esta ecuación se obtienen de manera sencilla si despejamos una de las incógnitas. Así,

$$x = -\frac{b}{a}y, \text{ con m.c.d.}(a, b) = 1.$$

Como m.c.d.$(a, b) = 1$, por el ejemplo 1.9, x es un número entero si a es un divisor de y. Por lo tanto, podemos poner $y = k \cdot a$ y las soluciones de (1.6) son de la forma

$$x = -k \cdot b, \qquad y = k \cdot a, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Paso 3.- Dar la solución general de la ecuación diofántica (1.5). Es evidente que si a una solución de (1.5) le sumamos una solución de (1.6) se obtiene una solución de (1.5) (basta con sumar las ecuaciones). En consecuencia, todas las posibles soluciones de (1.5) son de la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & c \cdot m - k \cdot b \\ y & = & c \cdot n + k \cdot a \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.7}$$

Ilustramos este procedimiento con un par de ejemplos. Notemos que en ocasiones, además de encontrar la solución general de una ecuación diofántica, hay que buscar la solución o soluciones que satisfacen algunas condiciones adicionales, como por ejemplo que las variables sean positivas. Para ello, se encuentra en primer lugar la solución general (1.7) y a continuación se determinan los valores del parámetro k para que se cumplan las condiciones adicionales.

Ejemplo 1.14.- *Encuentra todas las soluciones enteras no negativas de la ecuación* $7 \cdot x + 13 \cdot y = 147$.

En primer lugar, como $\text{m.c.d.}(7, 13) = 1$, vemos que le ecuación se puede resolver. Además, por el algoritmo de Euclides, encontramos que

$$1 = 2 \cdot 7 - 1 \cdot 13.$$

Multiplicando por 147, se obtiene

$$147 = 294 \cdot 7 - 147 \cdot 13.$$

Así, una solución particular es $x = 294$, $y = -147$. Sin embargo, para obtener el total de soluciones hay que añadir las soluciones de la ecuación homogénea

$$7 \cdot x + 13 \cdot y = 0,$$

que son de la forma $x = -13 \cdot k$, $y = 7 \cdot k$. Finalmente, se tiene que la solución general es

$$x = 294 - 13 \cdot k, \qquad y = -147 + 7 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como estamos interesados en las soluciones no negativas tiene que ser

$$294 - 13 \cdot k \geq 0 \Longrightarrow k \leq 294/13 = 22{,}615,$$
$$-147 + 7 \cdot k \geq 0 \Longrightarrow k \geq 147/7 = 21.$$

Por lo tanto $21 \leq k \leq 22{,}615$. Puesto que $k \in \mathbb{Z}$, los únicos valores posibles de k que hacen que la solución sea no negativa son $k = 21$ y $k = 22$. En estos casos la solución es:

$$k = 21, \qquad x = 21, \qquad y = 0.$$
$$k = 22, \qquad x = 8, \qquad y = 7. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 1.15.- *Disponemos de sellos de 5 céntimos y de 7 céntimos. ¿Por qué importes se pueden franquear cartas usando combinaciones de estos dos sellos?*

En realidad nos estamos preguntando por los valores de $c \in \mathbb{N}$ que hacen que la ecuación diofántica

$$5 \cdot x + 7 \cdot y = c$$

tenga soluciones enteras no negativas. Puesto que $\text{m.c.d}(7, 5) = 1$, sabemos que la ecuación anterior siempre tiene solución, aunque puede ser que x ó y sean negativos, en cuyo caso no obtendríamos una solución válida.

Resolvamos, pues, la ecuación e impongamos la condición de que las soluciones sean no negativas. Sin mucho esfuerzo obtenemos que las soluciones son

$$x = 3c - 7k, \qquad y = -2c + 5k.$$

Por tanto, para que las soluciones sean no negativas

$$\frac{2c}{5} \leq k \leq \frac{3c}{7}.$$

Pero k tiene que ser un número entero, así que habrá que exigir que entre $2c/5$ y $3c/7$ haya por lo menos un número entero, por lo que la diferencia entre estos dos números tiene que ser como mínimo 1, es decir

$$\frac{3c}{7} - \frac{2c}{5} \geq 1 \Longrightarrow \frac{c}{35} \geq 1 \Longrightarrow c \geq 35.$$

Se puede asegurar que es posible franquear cualquier carta de 35 o más céntimos. Sin embargo, esto no quiere decir que no se puedan franquear cartas por menor importe, aunque en este caso, habrá que comprobar caso por caso si es posible. De hecho, es posible franquear cartas por un importe de c céntimos siempre y cuando

$$c \notin \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 16, 18, 23\}.$$

Por lo tanto, se tiene que el problema tiene solución si $c \geq 24$.

Es más, se puede probar que, en general, las ecuaciones de la forma $mx + ny = c$ tienen soluciones no negativas si $c \geq (m-1)(n-1)$. ■

Una vez visto cómo se resuelven las ecuaciones con dos incógnitas, no es difícil generalizar el procedimiento al caso de n incógnitas. Para ello, basta tener en cuenta que el concepto de máximo común divisor puede generalizarse a una colección arbitraria de enteros.

Definición 1.8.- *El* máximo común divisor *de los enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es el mayor entero positivo que divide a todos y cada uno de los a_i. Se denota*

$$d = m.c.d.(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Si $d = 1$ diremos que los enteros son primos entre sí*.*

Una observación importante es que si

$$d = \text{m.c.d.}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{y} \quad d' = \text{m.c.d.}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}),$$

entonces $d = \text{m.c.d.}(d', a_n)$. Además, se puede ver que existen unos números enteros $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tales que

$$d = m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2 + \cdots + m_n \cdot a_n.$$

Teniendo esto en cuenta, pueden resolverse ecuaciones diofánticas de n incógnitas.

Ejemplo 1.16.- *Resuelve la ecuación* $6 \cdot x + 15 \cdot y + 10 \cdot z = 173$.

Aplicamos el algoritmo de Euclides para calcular m.c.d.$(6, 15, 10)$. En este sentido,

$$\text{m.c.d.}(6, 15, 10) = \text{m.c.d.}(\text{m.c.d.}(6, 15), 10).$$

Ahora bien, m.c.d.$(6, 15) = 3$ y

$$3 = \text{m.c.d.}(6, 15) = -2 \cdot 6 + 15. \tag{1.8}$$

Por otra parte, m.c.d.$(3, 10) = 1$ y

$$1 = \text{m.c.d.}(3, 10) = -3 \cdot 3 + 10. \tag{1.9}$$

Finalmente, teniendo en cuenta (1.8) y (1.9), resulta

$$1 = \text{m.c.d.}(6, 15, 10) = 6 \cdot 6 - 3 \cdot 15 + 10.$$

Por lo tanto una solución de la ecuación es

$$x = 6 \cdot 173 = 1\,038, \qquad y = -3 \cdot 173 = -519, \qquad z = 173.$$

Para obtener el total de soluciones, consideramos la ecuación homogénea

$$6 \cdot x + 15 \cdot y + 10 \cdot z = 0.$$

Despejando x se tiene

$$x = -\frac{15}{6}y - \frac{10}{6}z = -\frac{5}{2}y - \frac{5}{3}z, \tag{1.10}$$

y para que las soluciones sean enteras, tiene que ser $y = 2 \cdot k$ y $z = 3 \cdot k'$. Por lo tanto, la solución general se puede poner como

$$x = 1\,038 - 5 \cdot (k + k'),\ y = -519 + 2 \cdot k,\ z = 173 + 3 \cdot k',\ k, k' \in \mathbb{Z}.$$

Notemos que si no hubiéramos simplificado las fracciones en (1.10), es decir si hacemos

$$x = -\frac{15}{6}y - \frac{10}{6}z,$$

y razonamos diciendo que tanto y como z tienen que ser múltiplos de 6, no estaríamos considerando todas las soluciones. Se obtendría, por tanto, una solución incompleta. ■

1.6. Problemas resueltos

1. Prueba, por inducción, que $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ para $n \geq 1$.

   Solución. En primer lugar, comprobamos que la fórmula es cierta para $n = 1$, es decir, cuando sólo hay un sumando. Pero esto es obvio, pues

   $$\frac{1}{\sqrt{1}} = 1 < 2\sqrt{1} = 2.$$

   Ahora tenemos que probar el paso inductivo, es decir, tenemos que ver que si la fórmula se cumple para $n = k$, también se cumple para $n = k + 1$. En este caso, suponemos cierto que

   $$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}.$$

   Veamos entonces que

   $$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}.$$

   En efecto, teniendo en cuenta la hipótesis de inducción, resulta que

   $$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

   por lo que basta que probemos que

   $$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k+1}.$$

   Esta desigualdad es equivalente a

   $$2\sqrt{k(k+1)} + 1 \leq 2k + 2 \iff 4k(k+1) \leq 4k^2 + 4k + 1,$$

   que es siempre cierta. Luego la fórmula también es cierta para $n = k + 1$ y, por el principio de inducción matemática, es válida para cualquier $n \geq 1$. ■

2. Demuestra por inducción que $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$ para $n\geq 2$.

Solución. Para $n=2$ tenemos que la suma de los inversos de los números desde $n+1=3$ hasta $2n=4$ es
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}>\frac{13}{24}.$$
Una vez probada que es cierta la base de la inducción, tenemos que probar ahora el paso inductivo. Así, supongamos que la fórmula es cierta para $n=k$, es decir,
$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}.$$
Veamos entonces que también se cumple para $n=k+1$, es decir,
$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}>\frac{13}{24}.$$
Observemos que, sin más que sumar y restar $1/(k+1)$
$$\begin{aligned}&\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}\\ &=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$
La expresión contenida entre paréntesis es mayor que $13/24$, por la hipótesis de induccion. Por lo tanto, si probamos que
$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}\geq 0$$
ya quedará demostrado el resultado. En efecto,
$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}>0,\ \forall k\geq 2.$$
En consecuencia, la fórmula es cierta para $n=k+1$ y, por el principio de inducción matemática, es válida para cualquier $n\geq 2$. ■

3. Un sastre invierte 13 horas en diseñar un modelo de pantalón y 37 horas en diseñar un modelo de camisa. Si trabaja 2 000 horas, ¿cuántas camisas y pantalones deberá diseñar para conseguir la mayor combinación entre camisas y pantalones?

Solución. Sean x el número de pantalones que se diseñan e y el número de camisas. Según el tiempo que le cuesta realizar cada diseño y el total de horas que invierte, se debe cumplir
$$13x+37y=2\,000.$$
Para resolver esta ecuación, donde x e y son números enteros no negativos, calculamos el máximo común divisor de 37 y 13, que es 1, mediante el algoritmo de Euclides:
$$\begin{array}{r|l}37 & 13\\ \hline 11 & 2\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}13 & 11\\ \hline 2 & 1\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}11 & 2\\ \hline 1 & 5\end{array}$$
De aquí es posible encontrar el máximo común divisor como combinación de 13 y 37. En efecto,
$$\begin{aligned}1&=11-5\cdot 2=11-5\cdot(13-11)=6\cdot 11-5\cdot 13\\ &=6\cdot(37-2\cdot 13)-5\cdot 13=6\cdot 37-17\cdot 13.\end{aligned}$$
Por lo tanto una solución de la ecuación es
$$x=-17\cdot 2\,000=-34\,000,\qquad y=6\cdot 2\,000=12\,000.$$

Si a este solución le añadimos las soluciones de la ecuación homogénea $13x + 37y = 0$, obtenemos el total de soluciones. Ahora bien, las soluciones de la ecuación homogénea se obtienen de forma sencilla

$$13x + 37y = 0 \Rightarrow y = -\frac{13}{37}x \Rightarrow x = 37k,\ y = -13k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, el conjunto de soluciones de la ecuación original es

$$x = -34\,000 + 37k, \qquad y = 12\,000 - 13k.$$

Para que tanto x como y sean no negativos ha de satisfacerse

$$-34\,000 + 37k \geq 0 \Rightarrow k \geq \frac{34\,000}{37} = 918{,}19,$$

$$6\,000 - 13k \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{12\,000}{13} = 923{,}077.$$

Es decir los valores posibles de k son 919, 920, 921, 922 y 923, con lo que las posibles soluciones son:

k	919	920	921	922	923
x	3	40	77	114	151
y	53	40	27	14	1

La combinación mayor es cuando el producto $x \cdot y$ es máximo, lo que sucede cuando $x = 77$ e $y = 27$. ■

4. Un problema sobre ecuaciones diofánticas similar al que se propone apareció en un tratado chino de Matemáticas del siglo VI. Se conoce como el problema de «las cien aves de corral».

   Un gallo cuesta 50 monedas. Una gallina y tres pollos juntos cuestan 10 monedas. ¿Cuántos gallos, gallinas y pollos se pueden comprar con mil monedas si el número total de aves es cien?

   Nota: Las monedas son indivisibles. Una gallina cuesta más que un pollo, que a su vez cuesta, como mínimo, una moneda.

   Solución. Si llamamos x al número de gallos, y al número de gallinas, z al número de pollos, p al número de monedas que cuesta una gallina y q al número de monedas que cuesta un pollo, el problema consiste en resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 50x + py + qz = 1\,000 \\ p + 3q = 10, \end{cases}$$

donde $x, y, z \geq 0$, $p > q \geq 1$.
Comenzamos resolviendo la ecuación diofántica para los precios:

$$p + 3q = 10.$$

Notemos que esta ecuación tiene solución pues $\text{m.c.d}(1, 3) = 1$ que, evidentemente, es un divisor de 10. Además,

$$1 = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \Rightarrow 10 = -20 \cdot 1 + 10 \cdot 3,$$

luego $p = -20$, $q = 30$ es una solución particular. Las soluciones de la ecuación homogénea $p + 3q = 0$ son de la forma $p = -3q$. En consecuencia el conjunto de soluciones de $p + 3q = 10$ es:

$$\begin{cases} p = -20 + 3k \\ q = 10 - k, \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Ahora bien, las únicas soluciones que cumplen $p > q \geq 1$ son:

$$\begin{cases} k = 8 & \to \quad p = 4, \quad q = 2, \\ k = 9 & \to \quad p = 7, \quad q = 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos que estudiar dos casos.

Caso 1. Si $p = 4$, $q = 2$, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones diofánticas

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 50x + 4y + 2z = 1\,000. \end{cases}$$

Como $z = 100 - x - y$, se reduce a resolver $48x + 2y = 800$ ó, equivalentemente, $24x + y = 400$. Como m.c.d.$(24, 1) = 1$, esta ecuación tiene solución.
Tenemos que

$$1 = 1 \cdot 24 - 23 \cdot 1 \Rightarrow 400 = 400 \cdot 24 - 9\,200 \cdot 1,$$

luego $x = 400$, $y = -9\,200$ es una solución particular. Las soluciones de la ecuación homogénea $24x + y = 0$ son de la forma $y = -24x$, luego el conjunto de soluciones de $48x + 2y = 800$ es:

$$\begin{cases} x = 400 - k \\ y = -9\,200 + 24k, \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Se tiene que cumplir que $x \geq 0$, por lo que $k \leq 400$ y que $y \geq 0$, por lo que $k \geq 384$. Pero además, $z \geq 0$. Como

$$z = 100 - x - y = 8\,900 - 23k \geq 0 \Rightarrow k \leq 386.$$

Entonces, para $p = 4$ y $q = 2$, las únicas soluciones válidas son:

$$\begin{cases} k = 384 & \to \quad x = 16, \quad y = 16, \quad z = 68. \\ k = 385 & \to \quad x = 15, \quad y = 40, \quad z = 45. \\ k = 386 & \to \quad x = 14, \quad y = 64, \quad z = 22. \end{cases}$$

Caso 2. Si $p = 7$, $q = 1$, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones diofánticas

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 50x + 7y + z = 1\,000. \end{cases}$$

Como $z = 100 - x - y$, se reduce a resolver $49x + 6y = 900$. Como m.c.d.$(49, 6) = 1$, esta ecuación tiene solución.
Tenemos que

$$1 = 1 \cdot 49 - 8 \cdot 6 \to 900 = 900 \cdot 24 - 7\,200 \cdot 6,$$

luego $x = 900$, $y = -7\,200$ es una solución particular. Las soluciones de la ecuación homogénea $49x + 6y = 0$ son de la forma $y = -49x/6$, luego $x = 6k$, $y = -49k$, $k \in \mathbb{Z}$. Así, el conjunto de soluciones de $49x + 6y = 900$ es:

$$\begin{cases} x = 900 - 6k \\ y = -7\,200 + 49k, \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$. De nuevo hay que exigir $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$. Esto limita los posibles valores de k a $k \leq 150$, $k \geq 147$ y $k \leq 148$ respectivamente.
Entonces, para $p = 7$ y $q = 1$, las únicas soluciones válidas son:

$$\begin{cases} k = 147 & \to \quad x = 18, \quad y = 3, \quad z = 79. \\ k = 148 & \to \quad x = 12, \quad y = 52, \quad z = 36. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

5. En un local se sirven tres tipos de menú. Un día que sirven 10 de los primeros, 15 de los segundos y 12 de los terceros se recaudan 294 euros. Otro día se sirven 8, 16 y 14 menús, respectivamente, y la recaudación aumenta en 15 euros. Sabiendo que el precio de los menús es múltiplo de 0,5 euros, ¿se puede deducir cuál es su precio?

   Solución. Si llamamos x al precio del menú del primer tipo, y al precio del menú del segundo tipo y z al precio del menú del tercer tipo, el problema consiste en resolver el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} 10x + 15y + 12z = 294 \\ 8x + 16y + 14z = 309 \end{cases}$$
   donde x, y, z son múltiplos de 0,5. Por lo tanto, $u = 2x$, $v = 2y$, $w = 2z$ son enteros y el sistema anterior se puede escribir como un sistema de ecuaciones diofánticas:
$$\begin{cases} 10u + 15v + 12w = 588 \\ 4u + 8v + 7w = 309 \end{cases}$$
   con $u, v, w \in \mathbb{Z}$. Comenzamos resolviendo la ecuación diofántica obtenida al eliminar u de las ecuaciones (cinco veces la segunda menos dos veces la primera): $10v+11w = 369$. Notemos que esta ecuación tiene solución pues m.c.d$(10, 11) = 1$ que divide a 369. Además, sin necesidad de aplicar el algoritmo de Euclides, se tiene la identidad
$$1 = -1 \cdot 10 + 1 \cdot 11 \Rightarrow 369 = -369 \cdot 10 + 369 \cdot 11,$$
   luego $v = -369$, $w = 369$ es una solución particular. Las soluciones de la ecuación homogénea $10v + 11w = 0$ son de la forma $v = -11w/10$, es decir, $w = -10k$, $v = 11k$, $k \in \mathbb{Z}$. En consecuencia el conjunto de soluciones de $10v + 11w = 369$ es:
$$\begin{cases} v = -369 + 11k \\ w = 369 - 10k, \end{cases}$$
   con $k \in \mathbb{Z}$. Como se tiene que cumplir $v \geq 0$ y $w \geq 0$, resulta que $k \geq 34$ y $k \leq 36$ respectivamente.

   Pero además se tiene que cumplir la segunda ecuación. Así, sustituyendo los valores obtenidos de v y w en la segunda ecuación, tenemos $4u+18k = 678$, o equivalentemente, $2u+9k = 339$. Los valores $k = 34$ y $k = 36$ no nos proporcionan una solución entera para u, luego la única solución posible se obtiene para $k = 35$. En este caso, $u = (339 - 315)/2 = 12$. Además, $v = 16$ y $w = 19$.

   Por lo tanto, los precios de los menús son $x = 6$ euros, $y = 8$ euros y $z = 9{,}5$ euros. ∎

6. Se dispone de una medida de un galón (3,78 litros) y otra de una pinta (0,564 litros). ¿Es posible obtener una medida de exactamente un litro combinándolas de alguna manera? Plantea el problema en términos de ecuaciones diofánticas y encuentra la solución en el caso afirmativo o, en el caso negativo, indica cuál es la medida más cercana a un litro y cómo podría obtenerse usando el menor número de medidas de galón y pinta.

   Solución. Se trata de resolver la ecuación $3{,}78x + 0{,}564y = 1$ donde x es el número de medidas de galón e y el número de medidas de pinta. Esto es equivalente a resolver la ecuación diofántica
$$3\,780x + 564y = 1\,000 \iff 945x + 141y = 250.$$
   Como m.c.d.$(945, 141) = 3$, que no es un divisor de 250, esta ecuación no tiene soluciones enteras.

   Como $945x + 141y$ es un múltiplo de 3, buscamos el múltiplo de 3 más cercano a 250, que es 249 y resolvemos la ecuación diofántica
$$945x + 141y = 249 \iff 315x + 47y = 83,$$

que sí que tiene solución pues m.c.d.$(315, 47) = 1$. Aplicando el algoritmo de Euclides se llega a que

$$1 = 10 \cdot 315 - 67 \cdot 47 \Rightarrow 83 = 830 \cdot 315 - 5\,561 \cdot 47.$$

luego $x = 830$, $y = -5\,561$ es una solución particular. Las soluciones de la ecuación homogénea $315x + 47y = 0$ son de la forma $x = -47k$, $y = 315k$, $k \in \mathbb{Z}$. En consecuencia el conjunto de soluciones de $315x + 47y = 83$ es:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 830 - 47k \\ y = -5\,561 + 315k, \end{array} \right.$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Para que el problema tenga sentido x e y no pueden ser simultáneamente negativas. Notemos que $x \geq 0$ si $k \leq 17$ y que $y \geq 0$ si $k \geq 18$. Entonces, si $k \leq 17$ la solución consistiría en añadir medidas de galón y restar medidas de pinta. La solución que menos mediciones emplea se obtiene para $k = 17$. En este caso, $x = 31$ e $y = -206$, es decir, habría que añadir 31 medidas de galón y restar 206 medidas de pinta. Se usan, por tanto 237 mediciones.

Sin embargo, si $k \geq 18$ la solución consistiría en añadir medidas de pinta y restar medidas de galón. La solución que menos mediciones emplea se obtiene para $k = 18$, con $x = -16$ e $y = 109$, es decir, habría que añadir 109 medidas de pinta y restar 16 medidas de galón. En este caso se usan 125 mediciones y ésta es la solución que minimiza el número de mediciones a realizar. ■

1.7. Problemas propuestos

1. Demuestra por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ que, para todo número real $x > -1$, se cumple la desigualdad $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

2. Prueba, por inducción, que
   a) $n(n-1)(n+1)(3n+2)$ es divisible por 24 para $n \geq 0$.
   b) $4^n + 15n - 1$ es divisible por 9 para $n \geq 0$.

3. Prueba, por inducción, que:
   a) si $n > 3$ entonces $2^n \geq n^2$,
   b) si $n > 10$ entonces $n - 2 < \frac{n^2-n}{12}$,
   c) la sucesión definida como $a_0 = 1$, $a_n = (\sqrt{2})^{a_{n-1}}$, $(n \in \mathbb{N})$ cumple que $a_n \leq 2$ y que $a_n - a_{n-1} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Prueba, por inducción, que para $n \geq 0$, $3^{2n} + 4^{n+1}$ es divisible por 5.

5. Prueba, por inducción, que:
   (a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$,
   (b) $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$,
   (c) $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

   Sugiere una generalización.

6. Demuestra, por inducción, que si $n \geq 14$, entonces n puede escribirse como suma de treses y ochos, es decir, $n = a \cdot 3 + b \cdot 8$ con a y b enteros no negativos.

7. Escribe en base 7 los números $(124,\overset{\frown}{01})_5$ y $(3\,218)_{11}$.

8. **(Almacenamiento de números en un ordenador)** Los sistemas de numeración binario y hexadecimal son utilizados por algunos ordenadores para almacenar números en coma flotante. Vamos a analizar el comportamiento de un hipotético ordenador que tiene células de memoria formadas por 32 posiciones binarias (bits). Supongamos, además, que un número real x se almacena en base hexadecimal de la forma:
$$x = \pm m \cdot 16^{p-64}, \quad \frac{1}{16} \leq m < 1, \quad p > 0.$$
Entonces,
   - El primer bit se emplea para almacenar el signo (0 si es positivo, 1 si es negativo).
   - Los siete bits siguientes almacenan, en base 2, el exponente modificado p.
   - En los 24 bits siguientes se almacenan las primeras cifras no enteras de la representación binaria de la mantisa m.

   Para un ordenador de estas características, realiza los siguientes cálculos:
   a) Almacena los números 1, 1,1, -17 y el número de tu D.N.I.
   b) Encuentra la representación del mayor número y del menor número positivo que se puede almacenar en el ordenador. Haz una estimación del tamaño de dichos números en base 10.

9. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Probar que:
$$\text{(a)} \quad a|b \text{ y } c|d \Longrightarrow ac|bd, \quad \text{(b)} \quad a|b \Longrightarrow ac|bc, \quad \text{(c)} \quad ac|bc \Longrightarrow a|b.$$

10. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$ con m.c.d.$(a,b) = 1$. Si $a|c$ y $b|c$, prueba que $ab|c$. ¿Se obtiene lo mismo si m.c.d.$(a, b) \neq 1$?

11. De los asistentes a una convención de Colegios de Ingenieros, un $27{,}\widehat{18}\,\%$ eran mujeres, un $55{,}\widehat{5}\,\%$ eran mayores de 30 años y un 37 % llevaban corbata. Si el número total de colegiados es inferior a 15 000, ¿cuál fue el número de asistentes?

12. Diez estudiantes entran en un vestuario que tiene 10 armarios. El primer estudiante abre todos los armarios. El segundo cambia todos los estados (de abierto a cerrado o viceversa) de cada segundo armario a partir del segundo. Después, el tercero cambia el estado de cada tercer armario a partir del tercero. En general para $1 < k \leq 10$, el k-ésimo estudiante cambia el estado de cada k-ésimo armario a partir del k-ésimo. Después de haber pasado por los armarios el décimo estudiante, ¿cuáles quedarán abiertos? ¿Qué armarios quedarían abiertos si hubiera n armarios y n estudiantes, con $n \geq 2$?

13. Dos personas se reparten una cierta cantidad de dinero, pero un porcentaje de lo que reciben deben pagarlo en forma de impuestos. El primero de ellos paga un 20 %, mientras que el segundo un 17 %. Determina el total de dinero que se repartieron, si el primero de ellos recibió aproximadamente el doble de dinero que el segundo y el total de impuestos que pagaron entre los dos fue de 600 euros.

14. Una persona compra en un supermercado 15 litros de leche, unos de leche entera y otros de leche desnatada, por 10 euros. Si la leche entera es 13 céntimos más cara que la desnatada ¿Cuántos litros de cada ha comprado?

15. Un comerciante acude a un banco y solicita x monedas de euro e y monedas de céntimo de euro. Al irse comprueba que se han confundido y le han dado y monedas de euro y x monedas de céntimo de euro. Gracias a la confusión, ahora tiene el doble de dinero que el total solicitado más 2 céntimos. Si el comerciante pidió menos de 100 euros, ¿qué cantidad solicitó?

16. Una fábrica necesita 13 días para producir 100 coches del modelo A y 10 días para producir 100 coches del modelo B. Si no puede simultanear la producción de los dos tipos de coches, ¿cuántos coches de cada tipo podrán fabricarse en 365 días?

17. Un pequeño bodeguero quiere invertir 6 000 euros en la compra de dos variedades de uva para la producción de vino. Si el kilo de la variedad A cuesta a 1,11 euros y el de la variedad B a 0,93, ¿cuántos kilos de cada variedad debe comprar si el vino que quiere producir requiere que la proporción entre la variedad A y B sea lo más próxima a 3/2? Si la proporción tiene que ser exacta, ¿cúal es el mínimo de kilos de cada variedad que le sobrará?

18. Calcula las soluciones enteras de las ecuaciones

$$\begin{array}{llll} (a) & 28x+36y=44, & (b) & 66x+550y=88, \\ (c) & 323x+261y=1, & (d) & 35x+55y+77z=1. \end{array}$$

19. Una oficina gastó 360 euros en la adquisición de dos nuevos tipos de terminales telefónicos. Si uno de los modelos cuesta 30 y el otro 13. ¿Cuántos de cada tipo se compraron?

20. Dos componentes eléctricos cuestan 4 euros y 2,1 euros respectivamente. ¿Cuántos de cada tipo se pueden adquirir con 150 euros si tiene que haber menos de los que cuestan 4 euros que de los otros?

21. Un obrero trabaja 163 horas mensuales en una fábrica de calzado. Durante el siguiente mes la fábrica producirá dos modelos diferentes de zapato: A y B. El obrero emplea 5 horas en la elaboración de un par de zapatos de tipo A y 11 en la de tipo B. Si por un par de zapatos de tipo A recibe 24 euros y 60 por un par de zapatos de tipo B ¿cuántos de cada tipo debe elaborar para obtener el máximo beneficio? ¿Sería igual la solución si le dieran 30 euros por unos zapatos de tipo A y 60 por unos de tipo B?

22. Un obrero dispone de dos modelos de adoquines, uno de 19 cm. de largo y otro de 13 cm. Debe cubrir de adoquines dos hileras de 10 y 6 metros respectivamente. ¿Cuántos adoquines de cada tipo debe usar para que el total sea mínimo? ¿Harían falta los mismos adoquines para cubrir una longitud de 16 metros o se podría hacer con menos?

23. Un obrero trabaja en turnos de 8 horas, unas veces en turno de día y otras en turno de noche. Si trabajó 215 jornadas durante el año y la hora nocturna se paga 6 euros más que la diurna, ¿cuántos turnos de noche hizo si sus ingresos anuales fueron de 23 528 euros? ¿A cuánto le pagaron la hora?

24. Una fábrica necesita 14 días para producir el producto A y 22 días para producir el producto B. Si no puede simultanear la producción de los dos tipos de productos, ¿cuántas unidades de cada producto podrán fabricarse si se trabajan 358 días y se requiere que la diferencia entre las unidades fabricadas de A y de B sea lo menor posible?

25. Tres misioneros naufragan y llegan a una isla desierta donde sólo encuentran cocoteros. Pasan la tarde recogiendo cocos (había más de 200 pero menos de 300) y, cansados, se van a dormir con la intención de repartir los cocos a partes iguales al día siguiente. Sin embargo, todos son desconfiados y prefieren hacerse con su parte antes del amanecer. Así, el primer misionero se levanta por la noche y hace el reparto: divide los cocos en tres montones y le sobra uno, que tira al mar. Recoge su parte y se va a dormir. Al rato es el segundo misionero el que se levanta: hace tres montones con los cocos y le sobra uno, que tira al mar. Recoge su parte y se va a dormir. Por último, el tercer misionero hace lo propio. Se levanta, hace tres montones con los cocos y le sobra uno, que tira al mar. Recoge su parte y se va a dormir. Al amanecer los tres misioneros se presentan ante los cocos sobrantes y proceden a hacer el reparto. Hacen tres montones y les sobra uno, que tiran al mar, y cada uno se lleva su montón correspondiente. Ninguno de los misioneros protestó, pues todos pensaban que ya habían retirado el número de cocos que le correspondía. ¿Cuántos cocos había?

Capítulo 2

Combinatoria

2.1. Introducción

Se entiende por *combinatoria* el estudio, técnicas y métodos para contar el número de elementos de un conjunto finito. El problema de contar puede parecer sencillo a primera vista. Y esto suele ser cierto si el número de objetos asociado a un problema no es muy elevado. Ahora bien, incluso para problemas que no involucran un gran número de objetos, el número de soluciones puede ser enormemente grande. Así, por ejemplo, si nos preguntamos de cuántas maneras se puede reordenar una baraja española de 40 cartas, la solución, 40!, es un número del orden de 10^{48}. Por este y otros motivos se conocen diversas técnicas que ayudan a la hora de hacer un recuento.

Los orígenes de la combinatoria podría decirse que se remontan a los inicios de la civilización, cuando el hombre tuvo la necesidad de contar. Hay indicios de que el hombre contaba hace 35 000 años ([12], [18]). De esa época son los huesos de Lebombo e Ishongo, que presentan unas marcas que, casi con toda seguridad, eran usadas para contar el número de días transcurridos desde la luna nueva.

Sin embargo, los primeros problemas para contar grupos de elementos que cumplen ciertas reglas son más modernos y puede que tengan que ver con la lucha entre el bien y el mal. Así, en el I-Ching, o *libro de las mutaciones*, uno de los cinco libros de la sabiduría confucionista, aparecen todos los posibles hexagramas, o diagramas de 6 líneas, que pueden formarse con una barra continua, el yang (el bien) y otra discontinua, el yin (el mal).

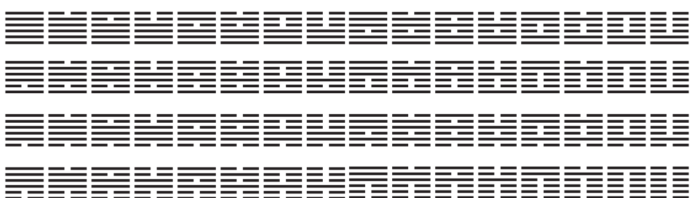


Figura 2.1: Los 64 hexagramas del I-Ching.

Tradicionalmente el I-Ching es atribuido al rey Wen, de la dinastía Zhou, hacia el siglo XII antes de Cristo. No obstante, es muy difícil datar con exactitud los textos antiguos y, de momento, no hay evidencias sólidas de que nadie compilara los 64 hexagramas antes del siglo III antes de Cristo. Precisamente de esa época son los primeros textos donde aparecen problemas y técnicas combinatorias y que fueron compilados en la India por los jainas. Uno de estos textos es el Bhagabati Sutra, en el que aparece un problema que tiene que ver con el total de selecciones que pueden hacerse de un conjunto de seis elementos cuando de ellos se eligen uno, dos o tres a la vez. Pero el libro que contiene más ideas y elementos propios de la combinatoria es el Chanda Sutra, escrito por Pingala hacia el siglo II antes de Cristo. Pingala estaba interesado en la prosodia relacionada con la composición de los versos de los cantos sagrados védicos mediante sílabas cortas o largas. El mismo problema que más tarde considerarían los griegos.

Desde entonces los problemas combinatorios han ido evolucionando y adaptándose a los tiempos en curso. A lo largo de la Historia nos encontramos con diversos problemas que han atraído la atención de científicos de renombre (Fibonacci, Euler, Cayley, etc.). En nuestros días la combinatoria sigue siendo un tema de actualidad debido, sobre todo, a su aplicación a cuestiones relacionados con la informática y la computación.

En este capítulo se presentan los principios básicos y las técnicas de recuento más habituales (variaciones, permutaciones, combinaciones, etc.). Con ellos se puede resolver una gran variedad de problemas, como los que se muestran en los ejemplos intercalados en el texto y en los propuestos en las últimas secciones.

La lectura de este capítulo se puede complementar con la de los dos capítulos siguientes, dedicados a las funciones generadoras y a las sucesiones recurrentes. En estos capítulos se presentan dos nuevas técnicas de cálculo que permiten resolver diferentes problemas combinatorios.

2.2. Cardinal de un conjunto

En esta sección nos adentramos un poco en la *Teoría de Conjuntos*, la rama de las Matemáticas que estudia los *conjuntos*, entendidos éstos como colecciones de objetos. El lenguaje y algunos conceptos empleados en la Teoría de Conjuntos son de uso común entre los matemáticos. Por ejemplo, el concepto de función o los diagramas de Venn se pueden explicar en cursos de educación primaria. Sin embargo, otros conceptos, como el de cardinal de un conjunto, son más sofisticados. A pesar de su carácter básico, la Teoría de Conjuntos es una disciplina que no se desarrolló hasta la década de los 70 del siglo XIX, con los trabajos de los matemáticos alemanes Georg Cantor y Richard Dedekind.

Para definir el cardinal de un conjunto necesitamos recordar algunas definiciones básicas sobre funciones.

Definición 2.1.- *Sean A y B dos conjuntos. Se define una* función *o* aplicación *de A en B, y se denota $f : A \to B$, como el conjunto de pares*

$$\{(a, f(a)); a \in A,\ f(a) \in B\},$$

definido de forma que a cada elemento $a \in A$ se le asocia un elemento, y solo uno, del conjunto B. A este último elemento se le denota por $f(a)$ y se le llama valor *o* imagen *de a por la aplicación f. Recíprocamente, si dado un elemento $b \in B$, existe un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$, entonces a se dice una* preimagen *de b.*

Al conjunto A se le llama conjunto inicial *de la aplicación f, mientras que al conjunto B se le llama* conjunto final *de f*

Suele ser habitual emplear el término de función cuando se trabaja con conjuntos de números reales o complejos, reservándose los términos de aplicación o correspondencia para otros tipos de conjuntos.

Definición 2.2.- *Sea $f : A \to B$ una aplicación entre dos conjuntos A y B.*

- *Se dice que f es* inyectiva *si para cada par de elementos $x, y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$ se tiene que $x = y$. Es decir, no puede haber dos elementos distintos en A que tengan la misma imagen.*
- *Se dice que f es* suprayectiva *si para todo $b \in B$ existe un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Es decir, todo elemento en el conjunto B tiene una preimagen.*
- *Se dice que f es* biyectiva *si es inyectiva y suprayectiva a la vez. En muchos textos, a las aplicaciones biyectivas también se les llama aplicaciones 1–1 (es decir, uno a uno).*

Ejemplo 2.1.- *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ no es inyectiva ya que se tiene que $f(a) = f(-a) = a^2$ y $a \neq -a$ para todo $a \neq 0$. Tampoco es suprayectiva ya que ningún número negativo tiene preimagen, es decir, no existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = -b$, con $b > 0$.*

La función $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ definida por $g(x) = x^2$ es suprayectiva pero tampoco es inyectiva.

La función $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $h(x) = x^2$ es inyectiva y suprayectiva, por lo tanto es biyectiva.

Definición 2.3.- *Contar los elementos de un conjunto A es establecer una biyección de A con el conjunto $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Si tal biyección existe, se dice que el conjunto A es* finito *y que su número de elementos, o* cardinal*, es n. Este número lo denotamos por $card(A)$ o por $|A|$.*

Una vez definido el cardinal de un conjunto, debemos asegurar que es único, es decir, debemos probar que si existe $b : \mathbb{N}_n \longrightarrow A$ biyectiva, no existe otra aplicación biyectiva de $\mathbb{N}_m$ en A con $m \neq n$. Esto es una consecuencia directa del siguiente teorema.

Teorema 2.1.- *Si $m < n$, no existe ninguna aplicación inyectiva de $\mathbb{N}_n$ en $\mathbb{N}_m$.*

Demostración. Supongamos que el conjunto $S = \{n \in \mathbb{N}$; existe una aplicación inyectiva $i : \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}_k$ para algún $k < n\}$ es no vacío. Por el principio del buen orden existe mínimo, que llamamos n_0. Evidentemente, $n_0 > 1$. Consideremos, ahora, $i : \mathbb{N}_{n_0} \longrightarrow \mathbb{N}_k$ inyectiva. Resulta que $k > 1$, pues en otro caso, al ser $n_0 \geq 2$, todos los elementos tendrían como imagen $k = 1$ y, entonces, i no sería inyectiva.

Supongamos que $i(j) \neq k$ si $1 \leq j \leq n_0 - 1$, entonces la aplicación $i : \mathbb{N}_{n_0-1} \longrightarrow \mathbb{N}_{k-1}$ (restricción de i a $\mathbb{N}_{n_0-1}$) sería inyectiva. Entonces $n_0 - 1 \in S$, pero esto es absurdo, pues n_0 era el mínimo.

Supongamos que existe j, $1 \leq j \leq n_0 - 1$ tal que $i(j) = k$, entonces $i(n_0) = p < k$. Si consideramos la aplicación $i_* : \mathbb{N}_{n_0-1} \longrightarrow \mathbb{N}_{k-1}$ definida por $i_*(j) = p$; $i_*(x) = i(x)$ si $x \neq j$, ésta sería inyectiva. De nuevo, resultaría que $n_0 - 1 \in S$, cosa que es absurda. Por lo tanto, no puede ser $S \neq \emptyset$ y el teorema queda probado. ∎

Además de justificar rigurosamente que el cardinal de un conjunto finito es único, de este teorema se deducen algunas consecuencias importantes. Una de ellas es la existencia de conjuntos infinitos.

Definición 2.4.- *Diremos que un conjunto no vacío A es* infinito *si no existe ninguna aplicación biyectiva de $\mathbb{N}_n$ en A, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\mathbb{N}$ es infinito.*

La propiedad más interesante de los conjuntos infinitos es que tienen subconjuntos propios con tantos elementos como el total. Es decir, se puede establecer una biyección entre una parte del conjunto y el propio conjunto. Este tipo de resultados, estudiados por el matemático alemán Georg Cantor (1845–1918), supusieron una revolución en la forma de pensar de la época. Cantor fue el primero en formalizar la noción de infinito. Además, descubrió que hay distintos tamaños de infinitos.

Cuando decimos que dos conjuntos tienen el mismo cardinal (coloquialmente hablando, tienen «el mismo número de elementos») indicamos que existe una correspondencia uno a uno entre ambos conjuntos, sin que quede ningún elemento de alguno de los conjuntos fuera de la correspondencia. Este procedimiento está asociado con la idea de «mismo número de elementos» para conjuntos finitos, pero no para conjuntos infinitos, donde un conjunto puede tener el mismo cardinal que otro estrictamente contenido en él. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.- *Los conjuntos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tienen el mismo cardinal y, sin embargo, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

En efecto, tienen la misma cardinalidad ya que se puede establecer la siguiente biyección entre ellos: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f(n) = n - 1$. ∎

Ejemplo 2.3.- *Hay tantos números pares como números naturales.*

Basta ver que se puede establecer una biyección entre los números $1, 2, 3 \ldots$ y los números pares $2, 4, 6, \ldots$. Pero esto es sencillo, ya que la aplicación

$$\begin{aligned} b : \mathbb{N} &\longrightarrow \{2, 4, 6, \ldots\} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

es claramente biyectiva. Es decir, una parte de $\mathbb{N}$ tiene tantos elementos como $\mathbb{N}$. ∎

De forma parecida, se podría probar que el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros tiene el mismo cardinal que $\mathbb{N}$. Quizás sorprenda más que los números racionales $\mathbb{Q}$ también tienen el mismo cardinal que los naturales $\mathbb{N}$.

Sin embargo, no todos los conjuntos infinitos son equivalentes (en el sentido de que se pueden poner en correspondencia biyectiva). Por ejemplo, los números reales, $\mathbb{R}$, representan un conjunto infinito de mayor orden que los números naturales. Una prueba de ello la dio Cantor[1], estableciendo que no existe una biyección entre los números naturales y el conjunto de números decimales de la forma $0.a_1a_2a_3 \cdots a_n \cdots$.

[1] Véase el apéndice 3 del libro *Matemáticas Discreta y Combinatoria* de R. P. Grimaldi [14, teorema A3.4]

Tenemos entonces que hay unos cardinales finitos, que podemos identificar con cada uno de los números naturales, y otros cardinales infinitos. El «más pequeño» de los cardinales infinitos es el del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ que, siguiendo a Cantor, se denota con el símbolo $\aleph_0$ (aleph sub cero, aleph es la primera letra del alfabeto hebreo). El cardinal de los números reales $\mathbb{R}$ se denota por $\mathcal{C}$. Se puede probar que $\mathcal{C} = 2^{\aleph_0}$.

Tal vez, a Cantor le hubiera gustado probar que $\mathcal{C} = \aleph_1$, es decir que el siguiente cardinal infinito más pequeño, después de $\aleph_0$ es $\mathcal{C}$. Cantor intentó probar esto, pero fracasó. La afirmación $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ se conoce como hipótesis del continuo. Su veracidad continúa siendo una cuestión de debate entre la comunidad científica[2].

2.3. Principios básicos de conteo

Las técnicas combinatorias para contar o enumerar los elementos de un conjunto se basan en una serie de principios elementales. Uno de tales principios, consecuencia del Teorema 2.1, es el llamado *principio del palomar*, también denominado principio de Dirichlet, de las cajas o del casillero.

Teorema 2.2.- (Principio del palomar) *Si m objetos se distribuyen en n cajas y $m > nr$, entonces hay al menos una caja que tiene más de r objetos.*

Las aplicaciones de este principio, casi obvio, son muchas, aunque no siempre triviales. Pongamos un par de ejemplos.

Ejemplo 2.4.- *Prueba que, dados 12 números enteros cualesquiera (incluso repetidos), siempre hay dos cuya diferencia es múltiplo de 11.*

Por el algoritmo de la división, todo número entero puede expresarse como $11 \cdot q + r$, con $0 \leq r < 11$. Si $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ son los 12 números seleccionados, entonces

$$a_k = 11 \cdot q_k + r_k, \qquad 1 \leq k \leq 12.$$

Como $0 \leq r_k < 11$, sólo hay 11 posibles restos diferentes. Ahora bien, como tenemos una colección de 12 restos, por el principio del palomar, debe haber al menos dos iguales. Sean esos restos r_i y r_j, entonces

$$a_i - a_j = 11 \cdot q_i + r_i - (11 \cdot q_j + r_j) = 11 \cdot (q_i - q_j).$$

Por lo tanto $a_i - a_j$ es múltiplo de 11. ∎

Ejemplo 2.5.- *Sea A un subconjunto de seis elementos distintos de*

$$\mathbb{N}_{14} = \{1, 2, 3, \ldots, 14\}.$$

Prueba que A tiene al menos dos subconjuntos no vacíos cuyos elementos suman lo mismo.

Como A tiene 6 elementos, el total de subconjuntos diferentes de A es 2^6 (ver más adelante el ejemplo 2.8), de los cuales uno es el conjunto vacío. Por lo tanto A tiene 63 subconjuntos diferentes no vacíos. A cada uno de esos subconjuntos le podemos asociar la suma de sus elementos, lo que hace un total de 63 sumas diferentes posibles.

Por otro lado, la mayor suma que puede obtenerse es la correspondiente a la suma de todos los elementos del propio conjunto A, que en el peor de los casos será

$$9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 69.$$

Sin embargo, en este caso, la menor de las sumas sería 9, lo que hace que la suma de los elementos de los subconjuntos de A sea un número comprendido entre 9 y 69. Como esto nos da un total de 61 sumas posibles y hay 63 subconjuntos diferentes, por el principio del palomar, hay al menos dos sumas repetidas.

En general, si $A = \{a_1 < \cdots < a_6\}$, la menor suma es a_1 y la mayor suma es $a_1 + \cdots + a_6$. Como $a_2 + \cdots + a_6 \leq 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60$, las sumas están comprendidas entre a_1 y $a_1 + 60$, luego hay un máximo de 61 sumas posibles. El resto sigue igual. ∎

[2]Para más información, se puede consultar el capítulo 16 del libro *El camino a la realidad* de R. Penrose [22]

Otros principios básicos sobre los cardinales de conjuntos son los siguientes.

Teorema 2.3.- (Principio de adición) *Sean A y B dos conjuntos finitos tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces* $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Este principio se generaliza por inducción. Así, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección de conjuntos disjuntos dos a dos, es decir $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Notemos que el principio del palomar es una consecuencia del principio generalizado de la adición. Así, si las cajas las denominamos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y cada caja contiene menos de r elementos, entonces, por el principio de adición,

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \leq nr < m.$$

Es decir, el total de elementos que hay en todas las cajas, es inferior al número de objetos que hemos repartido m.

También consecuencia del principio de adición es el *principio de inclusión-exclusión.*

Teorema 2.4.- (Principio de inclusión-exclusión) *Sean A y B dos conjuntos finitos, entonces*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

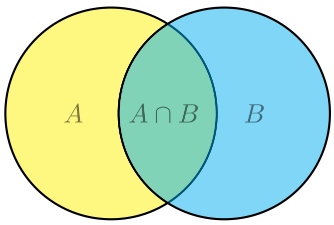


Figura 2.2: Interpretación gráfica del principio de inclusión-exclusión para dos conjuntos: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

El principio de inclusión-exclusión se puede generalizar a situaciones con más de dos conjuntos. Por ejemplo, en la figura 2.3 se muestra una interpretación gráfica del principio de inclusión-exclusión para el caso de tres conjuntos A, B y C, que hemos coloreado de colores amarillo, magenta y cyan respectivamente. En la figura de la izquierda aparece el diagrama de Venn de una intersección genérica de tres conjuntos, mostrando las 7 regiones a las que podría dar lugar. En el diagrama de la derecha aparecen las mismas 7 regiones junto con el número de veces (en números romanos) que se contarían los elementos de cada región si calculáramos $|A| + |B| + |C|$. Notemos que hay elementos que se han contado dos veces: los que están en $|A \cap B| - |A \cap B \cap C|$, en $|A \cap C| - |A \cap B \cap C|$ y en en $|B \cap C| - |A \cap B \cap C|$. Incluso hay elementos que se han contado tres veces: los que están en $|A \cap B \cap C|$. Por lo tanto para calcular correctamente el cardinal de la unión $|A \cup B \cup C|$, a la suma $|A| + |B| + |C|$ hay que restarle los cardinales de $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ y $|B \cap C|$. Al hacer esto, los elementos de $|A \cap B \cap C|$, que inicialmente estaban contados tres veces, los hemos descontado tres veces, por lo que es necesario añadir su cardinal al de $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$. En definitiva, tenemos que el cardinal de la unión de tres conjuntos es

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

En la formulación más general del principio de inclusión-exclusión, si tenemos una colección A_i $(1 \leq i \leq n)$ de conjuntos finitos, entonces

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|. \end{aligned}$$

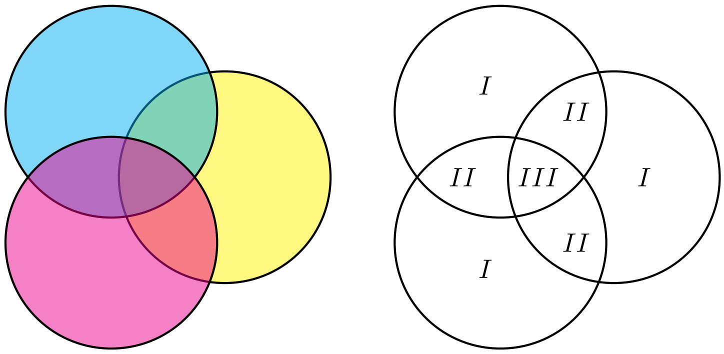


Figura 2.3: Interpretación gráfica del principio de inclusión-exclusión para tres conjuntos: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Ejemplo 2.6.- *¿Cuántos enteros hay, entre 1 y 1 000, que no son divisibles por 3, por 7 o por 11?*

Definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{enteros entre 1 y 1 000 divisibles por 3}\}, \\ B &= \{\text{enteros entre 1 y 1 000 divisibles por 7}\}, \\ C &= \{\text{enteros entre 1 y 1 000 divisibles por 11}\}. \end{aligned}$$

Lo que nos pide el problema es $|(A \cup B \cup C)^c| = 1\,000 - |A \cup B \cup C|$. Ahora bien, como uno de cada tres números es múltiplo de 3, resulta[3]

$$|A| = \left\lfloor \frac{1\,000}{3} \right\rfloor = 333.$$

Análogamente, $|B| = \lfloor (1\,000/7) \rfloor = 142$ y $|C| = \lfloor (1\,000/11) \rfloor = 90$. Por otra parte, podemos determinar los cardinales de las intersecciones teniendo en cuenta que si $x \in |A \cap B|$, entonces x es múltiplo de 21, por tanto

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1\,000}{21} \right\rfloor = 47, \quad |A \cap C| = \left\lfloor \frac{1\,000}{33} \right\rfloor = 30,$$

$$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{1\,000}{77} \right\rfloor = 12, \quad |A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{1\,000}{231} \right\rfloor = 4.$$

Finalmente, por el principio de inclusión-exclusión

$$|A \cup B \cup C| = 333 + 142 + 90 - (47 + 30 + 12) + 4 = 480$$

y por tanto la solución del problema es $1\,000 - 480 = 520$. ■

El último de los principios elementales de conteo es el *principio del producto*, que enunciamos a continuación.

Teorema 2.5.- (Principio del producto) *Sean A y B dos conjuntos finitos. Si se define el conjunto producto $A \times B = \{(a, b); a \in A,\ b \in B\}$, entonces*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Este principio también se generaliza por inducción para el producto cartesiano de una colección finita de conjuntos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$. En este sentido,

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

Podría decirse que, conocidos los principios básicos del conteo, la combinatoria está estudiada. Sin embargo, aparecen con frecuencia algunos tipos de problemas que dan lugar a unas técnicas combinatorias que reciben un nombre especial. En lo que sigue se irán desarrollando algunas de estas técnicas.

[3] $\lfloor a \rfloor$ representa el entero m más próximo a a tal que $m < a$. Comúnmente se denomina parte entera de a.

2.4. Variaciones con repetición

Supongamos que queremos contar el total de posibles aplicaciones que pueden construirse de un conjunto X, de k elementos, en otro conjunto Y, de n elementos.

Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ queda completamente determinada si conocemos cada una de las imágenes de los k elementos de X. Es decir, debemos conocer $f(x_i)$ con $1 \leq i \leq k$. Esto equivale a dar una k-tupla

$$(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k))$$

del conjunto $Y^k = \overbrace{Y \times Y \times \cdots \times Y}^{k \text{ veces}}$. También es equivalente a dar una palabra de k letras del alfabeto Y $(f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n))$ o a dar una selección ordenada de k elementos entre los de Y (notemos que pueden repetirse elementos de Y, es decir, puede ocurrir que $f(x_i) = f(x_j)$ con $i \neq j$).

La única condición es que $f(x_i) \in Y$. Por tanto, el total de aplicaciones de X en Y, o el total de *variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k*, es igual al cardinal de Y^k que, por el principio del producto, es n^k. Si denotamos a este número por $\mathrm{VR}(n, k)$, entonces

$$\mathrm{VR}(n, k) = n^k.$$

El ejemplo más conocido sobre variaciones con repetición es el siguiente.

Ejemplo 2.7.- *¿Cuál es la probabilidad de acertar en una quiniela el pleno al quince?*

Nótese que dar una quiniela es dar una lista de 15 símbolos (1, X, 2), es decir, una palabra de longitud 15 construida con el alfabeto (1, X, 2). Por tanto, según lo visto, el total de quinielas posibles es $\mathrm{VR}(3, 15) = 3^{15}$ y la probabilidad pedida es

$$p = \frac{1}{3^{15}} = 6{,}969171937625632 \times 10^{-8}.$$

Es interesante observar que el problema es equivalente a distribuir 15 objetos diferentes (los partidos) en tres cajas etiquetadas (1, X, 2), con lo cula este problema se podría resolver también usando distribuciones, una técnica que trataremos más adelante. ∎

Otro ejemplo, no tan conocido, nos permite determinar el total de subconjuntos diferentes que tiene un conjunto dado A.

Ejemplo 2.8.- *Dado un conjunto A, de n elementos, prueba que el total de subconjuntos diferentes de A es 2^n.*

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$, el conjunto de todos los subconjuntos de A, que recibe el nombre de *partes de A*, $(\mathcal{P}(A))$, es

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

En este caso se tiene $|\mathcal{P}(A)| = 2^3$, como dice el enunciado del problema. Para ver que esto es así en general, podemos identificar cada subconjunto con una palabra de longitud n del alfabeto $(0, 1)$. Un cero en la posición k significará que el elemento k-ésimo no pertenece al subconjunto, mientras que un uno indicará que sí pertenece. En este sentido, para el caso $A = \{1, 2, 3\}$, se tiene la siguiente correspondencia entre subconjuntos y palabras

$$\begin{array}{ccc@{\qquad}ccc}
\emptyset & \longrightarrow & 000 & \{1,2\} & \longrightarrow & 110 \\
\{1\} & \longrightarrow & 100 & \{1,3\} & \longrightarrow & 101 \\
\{2\} & \longrightarrow & 010 & \{2,3\} & \longrightarrow & 011 \\
\{3\} & \longrightarrow & 001 & \{1,2,3\} & \longrightarrow & 111
\end{array}$$

Generalizando este razonamiento a un conjunto A de n elementos, el total de subconjuntos es el total de aplicaciones entre el conjunto A y el conjunto $\{0, 1\}$, es decir 2^n. ∎

2.5. Variaciones

Supongamos ahora que queremos contar el total de posibles aplicaciones inyectivas que pueden construirse de un conjunto X, de k elementos, en otro conjunto Y, de n elementos (notemos que en este caso $k \leq n$).

Como en el caso de las variaciones con repetición, la aplicación queda determinada si conocemos las imágenes de todos los elementos de X. De nuevo podemos ver la aplicación como una k-tupla de Y^k, sólo que esta vez el cardinal del conjunto

$$S = \{f : X \longrightarrow Y; f \text{ inyectiva}\}$$

no coincide con el de Y^k. S es un subconjunto propio de Y^k, ya que dos elementos de X no pueden tener la misma imagen. Dicho de otra forma, si consideramos la aplicación f como una palabra de k letras del alfabeto Y, ésta no tiene letras repetidas. Así, si la aplicación f es $f(x_1)f(x_2)f(x_3)\cdots f(x_n)$, entonces

$$\begin{aligned}
&f(x_1) \in Y,\\
&f(x_2) \in Y \setminus \{f(x_1)\} = \{y \in Y; y \neq f(x_1)\},\\
&f(x_3) \in Y \setminus \{f(x_1), f(x_2)\} = \{y \in Y; y \neq f(x_1), y \neq f(x_2)\},\\
&\qquad\vdots\\
&f(x_k) \in Y \setminus \{f(x_1), \ldots, f(x_{k-1})\} = \{y \in Y; y \neq f(x_1), \ldots, y \neq f(x_{k-1})\}.
\end{aligned}$$

Si denotamos por $\mathrm{V}(n,k)$ al total de aplicaciones inyectivas de X en Y y lo llamamos *variaciones de n elementos tomados de k en k*, entonces, por el principio del producto,

$$\mathrm{V}(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

donde $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ es el producto de todos los números naturales desde 1 hasta n (*factorial* de n).

Ejemplo 2.9.- *¿Cuál es la probabilidad de que entre un grupo de n personas haya dos que celebren el cumpleaños el mismo día?*

Calcularemos la probabilidad del suceso contrario que es más sencilla. Es decir, calcularemos la probabilidad de que las n personas celebren su cumpleaños en diferentes días. Esto es equivalente a dar una lista ordenada de n días distintos de entre los 365 días del año. Por lo tanto, el total de casos favorables es

$$\text{casos favorables} = \mathrm{V}(365, n) = \frac{365!}{(365-n)!}.$$

Por otra parte, los casos posibles son todas las posibles listas ordenadas de n días, es decir,

$$\text{casos posibles} = \mathrm{VR}(365, n) = 365^n.$$

Finalmente, la probabilidad pedida es

$$p = 1 - \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = 1 - \frac{\mathrm{V}(365,n)}{\mathrm{VR}(365,n)} = 1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!}.$$

En la tabla 2.1 se muestran algunos valores de la probabilidad p para distintos valores del número de personas n.

Observemos que, a partir de 22 personas, la probabilidad es superior al 50 % y que a partir de 40 personas la probabilidad es superior al 90 %. ■

Tabla 2.1: Probabilidad de que que en un grupo de n personas haya al menos dos que celebren su cumpleaños el mismo día.

n	p	n	p
5	0.027136	35	0.814383
10	0.116948	40	0.891232
15	0.252901	45	0.940976
20	0.411438	50	0.970374
21	0.443688	55	0.986262
22	0.475695	60	0.994123
23	0.507297	65	0.997683
24	0.538344	70	0.999160
25	0.568700	75	0.999720
26	0.598241	80	0.999914
27	0.626859	85	0.999976
28	0.654461	90	0.999994
29	0.680969	95	0.99999856
30	0.706316	100	0.99999969

2.6. Permutaciones

Una *permutación* de un conjunto A es una aplicación biyectiva de A en A. El total de permutaciones de A coincide con el total de aplicaciones inyectivas de A en A. Por tanto, si $|A| = n$, el total de permutaciones será[4]

$$\mathrm{P}(n) = \mathrm{V}(n, n) = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = \frac{n!}{0!} = n!.$$

En general, si f es una biyección entre dos conjuntos A y B con $|A| = |B| = n$ se identifica la biyección

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a_i &\mapsto f(a_i) = b_j \end{aligned}$$

con la *permutación* $\pi : \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}_n$ tal que $\pi(i) = j$ si $f(a_i) = b_j$. La permutación π se escribe

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(n) \end{array}\right)$$

Las permutaciones pueden componerse, en el sentido de que si se aplican dos permutaciones seguidas se obtiene una nueva permutación. El conjunto de permutaciones de *orden* n se denota por S_n y es evidente que $|S_n| = n!$.

Ejemplo 2.10.- *Realiza la composición de las permutaciones*

$$\pi_1 = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 7 & 4 & 6 & 2 \end{array}\right) \quad y \quad \pi_2 = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 7 & 6 \end{array}\right).$$

Como la primera permutación envía el 1 al 5 y la segunda envía el 5 al 1, resulta, $\pi_2 \circ \pi_1(1) = 1$ y entonces

$$\pi_2 \circ \pi_1 = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 7 & 4 \end{array}\right).$$

Notemos que

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{array}\right),$$

por lo que, en general, la composición de permutaciones no es una operación conmutativa. ■

[4] Por convenio se toma $0! = 1$

Algunas permutaciones reciben nombres específicos, como los *ciclos.*

Definición 2.5.- *Una permutación $\sigma \in S_n$ es un* ciclo *de longitud r si deja fijos $n-r$ elementos y permuta circularmente los otros r. Es decir, existe una ordenación $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ tal que*

$$\begin{aligned} &\sigma(i_j) = i_{j+1}, \qquad 1 \le j \le r-1, \\ &\sigma(i_r) = i_1, \\ &\sigma(k) = k \qquad \forall k \in \mathbb{N}_n \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}. \end{aligned}$$

El ciclo se escribe como $(i_1\, i_2\, \ldots\, i_r)$.

Ejemplo 2.11.- *La permutación* $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ *es un ciclo de longitud 7 que se escribe* $(1\,5\,6\,7\,3\,4\,2)$.

Ejemplo 2.12.- *La permutación* $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *es un ciclo de longitud 3 que se escribe* $(1\,5\,4)$.

El resultado más interesante sobre ciclos es el siguiente

Teorema 2.6.- *Toda permutación puede ponerse como una composición de ciclos.*

Demostración. La manera de demostrarlo, sin entrar en muchos detalles, es como sigue. Sea σ la permutación de S_n que queremos descomponer en ciclos. Comencemos por considerar el 1 y la secuencia $\sigma(1)$, $\sigma^2(1) = \sigma(\sigma(1))$, $\sigma^3(1)$, ..., hasta encontrar un $r \le n$ tal que $\sigma^r(1) = 1$. De esta forma tenemos el ciclo $(1\,\sigma(1)\,\sigma^2(1)\,\ldots\,\sigma^{r-1}(1))$. Si $r = n$ hemos terminado y σ es un ciclo de longitud n que recibe el nombre de *permutación cíclica.* Si $r < n$, tomamos un número i_1 que no esté en el ciclo del 1 y calculamos $\sigma(i_1)$, $\sigma^2(i_1)$, ..., hasta llegar a un $s \le n-r$ tal que $\sigma(i_1) = i_1$. Obtenemos el ciclo $(i_1\,\sigma(i_1)\,\ldots\,\sigma^{s-1}(i_1))$. Si $r+s = n$ hemos terminado y

$$\sigma = (1\,\sigma(1)\,\sigma^2(1)\,\ldots\,\sigma^{r-1}(1)) \circ (i_1\,\sigma(i_1)\,\ldots\,\sigma^{s-1}(i_1)).$$

En caso contrario, continuamos hasta incluir todos los números en algún ciclo. ∎

Ejemplo 2.13.- *Descompón en ciclos la permutación*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 4 & 6 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Siguiendo la demostración del Teorema 2.6, empezamos por considerar el ciclo al que pertenece el 1. De esta forma vemos cuál es la imagen del 1, luego la imagen de la imagen y así sucesivamente hasta regresar al 1.

$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 1 \equiv (1\,3\,7).$$

Tomamos ahora el primer número no incluido en el ciclo anterior y construimos el ciclo al que pertenece, $(2\,5\,4\,8)$. Continuamos hasta ver que

$$\sigma = (1\,3\,7)(2\,5\,4\,8)(6)(9). \qquad \blacksquare$$

Si en lugar de permutar números, permutamos las cartas de una baraja, se dice que estamos haciendo una *mezcla.* Cuando mezclamos varias veces las cartas de una baraja, estamos componiendo permutaciones (operación que, como sabemos, no es conmutativa).

Algunas aplicaciones de la descomposición en ciclos pueden encontrarse en diferentes trucos de magia realizados con una baraja. Se trata de aparentar un desorden de las cartas, cuando en realidad se están haciendo ciertas permutaciones, cuya descomposición en ciclos se conoce. Para ello, resulta útil saber que si un ciclo de longitud r se itera r veces, entonces todos los elementos quedan como al principio. Es decir, $\sigma^r(k) = k$, $1 \le k \le n$.

Ejemplo 2.14.- *Los números del 1 al 15 están dispuestos en forma de matriz* 3×5. *Se reordenan, leyendo los números por filas y escribiéndolos por columnas*

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{matrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{matrix} 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{matrix}$$

¿Después de cuántas repeticiones de este proceso la tabla quedará como al principio?

El reordenamiento de la tabla no es más que una permutación de S_{15}, que descompuesta en ciclos se escribe como

$$(1)(2\,4\,10\,14\,12\,6)(3\,7\,5\,13\,9\,11)(8)(15)$$

Por lo tanto como los ciclos son de longitud 1 ó 6, depués de 6 repeticiones la tabla quedará como estaba. ∎

Ejemplo 2.15.- *Una mezcla faro (o mezcla perfecta) se efectúa de la siguiente manera:*

- *Se divide el montón de cartas exactamente por la mitad.*
- *Se mezclan las cartas de forma que se vayan alternando de una en una las cartas de una mitad con las de la otra.*

Se distinguen dos tipos de mezcla:

- *Faro out: cuando las cartas superior e inferior del montón inicial mantienen sus posiciones después de la mezcla.*
- *Faro in: cuando, después de la mezcla, la carta superior pasa al segundo lugar y la inferior al penúltimo lugar.*

Si realizamos una mezcla faro in con 10 cartas, ¿cómo han quedado ordenadas las cartas? Si realizamos varias mezclas faro in consecutivas, ¿se puede recuperar la ordenación inicial? En caso afirmativo, ¿después de cuántas mezclas? ¿Qué ocurre con las mezclas de faro out?

Si denotamos $I(j)$ la posición de la carta j después de una mezcla faro in, tenemos la siguiente permutación:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Como esta permutación es un ciclo de longitud 10, después de 10 mezclas faro in consecutivas, volvemos a la posición inicial.

La ordenación resultante después de hacer una mezcla faro out es la siguiente:

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Esta permutación se puede expresar como el producto de dos ciclos de longitud uno, un ciclo de longitud seis y otro ciclo de longitud dos:

$$(1)(2\,3\,5\,9\,8\,6)(4\,7)(10)$$

Como el mínimo común múltiplo de 2 y 6 es 6, se recupera la posición inicial después de 6 mezclas faro out. ∎

Existen muchos problemas matemáticos interesantes relacionados con las mezclas faro in y faro out y, en general, con las mezclas de cartas[5]. Por ejemplo, se conoce [7] que el número de mezclas necesarias para que

[5]Para más información sobre problemas de mezclas de cartas, se puede consultar el artículo de V. Álvarez, P. Fernández y M. A. Márquez, *Cartomagia matemática y cartoteoremas mágicos*, [1] o los libros *The book of numbers* de J. Conway y R. Guy [7] o *Magic tricks, card shuffling and dynamic computer memories* de S. B. Morris [20].

una baraja de n cartas vuelva a su posición inicial es el menor entero k (llamado orden de la permutación) que cumple:

$$\begin{array}{lll} 2^k \equiv 1 & (\text{mod } n) & \text{si } n \text{ es impar} \\ 2^k \equiv 1 & (\text{mod } n-1) & \text{si } n \text{ es par y la mezcla es faro out} \\ 2^k \equiv 1 & (\text{mod } n+1) & \text{si } n \text{ es par y la mezcla es faro in.} \end{array}$$

Aquí se ha empleado la noción de *congruencia* entre números enteros. En general se dice que a es congruente con b módulo m, y se escribe $a \equiv b\,(\text{mod } m)$, $m \in \mathbb{N}$, si a y b tienen el mismo resto al dividirlos por m o, equivalentemente, si existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $a = pm + b$.

En la tabla 2.2 se muestran algunos órdenes de la permutación para distintos valores de n.

Tabla 2.2: Órdenes de permutación de algunas mezclas faro in y faro out.

n	Faro in	Faro out	n	Faro in	Faro out
2	2	1	11	10	10
3	2	2	12	12	10
4	4	2	13	12	12
5	4	4	14	4	12
6	3	4	15	4	4
7	3	3	16	8	4
8	6	3	17	8	8
9	6	6	18	18	8
10	10	6	19	18	18

Por ejemplo, para una baraja americana con 52 cartas, el número de mezclas necesarias para que la baraja vuelva a su posición inicial con una mezcla faro out es 8, ($2^8 = 5 \times 51 + 1$). Sin embargo, con una mezcla faro in, el número de mezclas necesarias es 52 ($2^{52} = 84\,973\,577\,874\,915 \times 53 + 1$).

2.7. Números de Stirling de primera clase

Planteemos ahora la siguiente pregunta: ¿Cuántas permutaciones de S_n se descomponen en k ciclos? Denotemos a este número por $\left[{n \atop k}\right]$, que denominaremos *número de Stirling de primera clase*.

Una formulación alternativa de este problema es la siguiente: ¿de cuántas maneras se pueden sentar n personas en k mesas redondas sin que ninguna quede vacía? La respuesta a esta pregunta es también el número de Stirling de primera clase $\left[{n \atop k}\right]$.

Algunos de estos números son fáciles de calcular. Por ejemplo, $\left[{n \atop n}\right]$ representa el total de permutaciones que se descomponen en n ciclos. En este caso, cada elemento forma un ciclo de manera única y por tanto $\left[{n \atop n}\right] = 1$.

También es fácil calcular $\left[{n \atop 1}\right]$. Ahora se trata de ver cuántas permutaciones se descomponen en un sólo ciclo. Para ello, observemos que los siguientes ciclos son equivalentes

$$(A\,B\,C\,D) \equiv (B\,C\,D\,A) \equiv (C\,D\,A\,B) \equiv (D\,A\,B\,C).$$

De alguna manera, el primer elemento del ciclo lo podemos fijar y sólo es necesario cambiar los siguientes elementos de orden para obtener ciclos distintos. Por lo tanto

$$\left[{n \atop 1}\right] = (n-1)!.$$

Supongamos que conocemos los números de Stirling de primera clase para el caso de las permutaciones de $n-1$ elementos y queremos calcular $\left[{n \atop k}\right]$. Distinguiremos dos situaciones:

1. En la primera supondremos que el elemento n forma un ciclo de longitud 1. Entonces, los $n-1$ elementos restantes están en $k-1$ ciclos, lo que aporta un total de $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$ posibles descomposiciones.

Tabla 2.3: Números de Stirling de primera clase.

n	$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{1}$	$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{2}$	$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{3}$	$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{4}$	$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{5}$	$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{6}$	$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{7}$
1	**1**						
2	**1**	**1**					
3	**2**	**3**	**1**				
4	**6**	**11**	**6**	**1**			
5	**24**	**50**	**35**	**10**	**1**		
6	**120**	**274**	**225**	**85**	**15**	**1**	
7	**720**	**1 754**	**1 624**	**735**	**175**	**21**	**1**

2. En la segunda supondremos que n no es un ciclo de longitud 1. Por tanto ahora los $n-1$ elementos restantes están en k ciclos, mientras que el elemento n puede ser introducido en cualquiera de ellos de todas las formas posibles. Por ejemplo, si tenemos la descomposición

$$(A\,B\,C)(D\,E)$$

y queremos insertar un sexto elemento F, lo podemos hacer de las 5 maneras siguientes

$$\begin{gathered}(A\,F\,B\,C)(D\,E),\\(A\,B\,F\,C)(D\,E),\\(A\,B\,C\,F)(D\,E),\\(A\,B\,C)(D\,F\,E),\\(A\,B\,C)(D\,E\,F).\end{gathered}$$

Generalizando este razonamiento, n puede introducirse de $n-1$ formas diferentes y esto nos da $(n-1)\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n-1}{k}$ nuevas descomposiciones. Por lo tanto

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}+(n-1)\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

En la tabla 2.3 se dan los números de Stirling hasta $n=7$. Obsérvese que si se suman todos los números de Stirling en una misma fila (fila k-ésima por ejemplo) se obtiene el factorial de k, $k!$.

La relación de recurrencia (2.1) permite construir una *función generadora* de los números de Stirling. En efecto, si denotamos por $x^{\overline{n}}$ al siguiente producto

$$x^{\overline{n}}=\overbrace{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}^{n\text{ factores}},$$

entonces, aplicando (2.1) y utilizando el principio de inducción matemática, resulta

$$x^{\overline{n}}=\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}x^2+\begin{bmatrix}n\\3\end{bmatrix}x^3+\cdots+\begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix}x^n=\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^k. \tag{2.2}$$

De alguna manera, la función $F(x) = x^{\overline{n}}$ genera los números de Stirling, ya que una vez desarrollada nos permitiría generar la misma tabla 2.3, sin necesidad de recordar la forma en que fue construida. Es decir, la función $F(x)$ recoge la propiedad fundamental de recurrencia de estos números. De esta forma, si quisiéramos conocer los números de Stirling para $n = 8$, basta calcular $F(x)$ con $n = 8$. Así,

$$x^{\overline{8}} = 5\,040x + 13\,068x^2 + 13\,132x^3 + 6\,769x^4 + 1\,960x^5 + 322x^6 + 28x^7 + x^8$$

y, por ejemplo $\left[{8 \atop 5}\right] = 1\,960$.

Ejemplo 2.16.- *Sea P_k^n la suma de todos los posibles productos de k factores tomados del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Prueba que $P_k^n = \left[{n+1 \atop n+1-k}\right]$.*

Antes de hacer la demostración, veamos un ejemplo concreto, para ilustrar el comportamiento de P_k^n. Así, $P_3^4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 50$ que, efectivamente, coincide con $\left[{5 \atop 2}\right]$.

La demostración se sigue de la función generadora de los números de Stirling de primera clase[6]. En efecto, consideremos $x^{\overline{n+1}}$:

$$x^{\overline{n+1}} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n) = \sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

El coeficiente de x^k es por un lado $\left[{n+1 \atop k}\right]$, pero por otro es el que se obtiene de la suma de los productos de $n + 1 - k$ números entre 1 y n (de k factores se toma x y del resto un número). Por lo tanto, el coeficiente de x^{n+k-1} es igual a la suma de todos los productos formados por k factores entre 1 y n. ■

Los números de Stirling aparecen en contextos muy diversos, aparentemente con poca conexión con la Combinatoria, como por ejemplo en algoritmos para la suma de series o en aproximaciones asintóticas de funciones especiales.

2.8. Combinaciones

Sea A un conjunto de n elementos y preguntémonos por el total de subconjuntos de k elementos diferentes que podemos formar. Cada uno de estos subconjuntos puede entenderse como una selección (no ordenada) de k elementos de los n elementos del conjunto de partida. También diremos que se trata de una *combinación de n elementos tomados de k en k, o de orden k*.

Al número de subconjuntos de k elementos ($0 \leq k \leq n$) de un conjunto de n elementos se le denota por $\binom{n}{k}$ o por $C(n, k)$ y se dice *n sobre k*, o también, *número o coeficiente binomial* o *combinaciones de n sobre k*.

Para calcular $\binom{n}{k}$ observemos que cada aplicación inyectiva $f : \mathbb{N}_k \longrightarrow A$ define un subconjunto de k elementos de A, que es el conjunto de las imágenes de $\mathbb{N}_k$, esto es $S = \{f(1), f(2), \ldots, f(k)\}$. Ahora bien, este subconjunto está generado por $k!$ aplicaciones inyectivas diferentes (basta ordenar de todas las formas posibles las imágenes). Por tanto, se tiene que el total de aplicaciones inyectivas es $k!$ veces el total de subconjuntos de k elementos de A, es decir,

$$\mathrm{V}(n, k) = k!\binom{n}{k} \Longrightarrow \binom{n}{k} = \frac{\mathrm{V}(n, k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Otra forma de calcular los coeficientes binomiales es apoyándose en lo que representan. Así, es fácil ver que

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = 0,\ k > n,$$

ya que, por ejemplo, $\binom{n}{n}$ representa el total de subconjuntos de n elementos que pueden formarse a partir de un conjunto A con n elementos. Esto es, obviamente, uno. A partir de estas relaciones básicas se tiene el siguiente resultado.

[6]Una demostración elegante de este problema puede verse en A.T. Benjamin, G.O. Preston y J.J. Quinn: A Stirling encounter with harmonic numbers, *Mathematics Magazine*, **75**, 95–103, 2002.

Teorema 2.7.- *Para cada k, tal que $1 \leq k \leq n$, se cumple*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Demostración. Sea A un conjunto de n elementos y $x \in A$ un elemento cualquiera de A. Los subconjuntos de k elementos de A pueden dividirse en dos clases:

a) Aquéllos que contienen al elemento x, que podemos escribir como

$$U = \{S \subset A\,;\, |S| = k \text{ y } x \in S\}.$$

b) Aquéllos que no contienen al elemento x, esto es,

$$V = \{S \subset A\,;\, |S| = k \text{ y } x \notin S\}.$$

Es evidente que $\binom{n}{k} = |U \cup V| = |U| + |V|$ ya que $U \cap V = \emptyset$.

Observemos que $S \in U$ si y sólo si $S \setminus \{x\}$ es un subconjunto de $k-1$ elementos de $A \setminus \{x\}$. De esta forma en U hay tantos elementos como selecciones de $k-1$ elementos puedan hacerse de un conjunto de $n-1$ elementos y, por tanto, $|U| = \binom{n-1}{k-1}$.

Análogamente, $S \in V$ si y sólo si S es un subconjunto de k elementos de $A \setminus \{x\}$. Por lo tanto $|V| = \binom{n-1}{k}$.

De lo anterior se sigue que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. ■

Lo que este resultado nos proporciona es una forma recursiva de calcular los coeficientes binomiales como se puede ver en la tabla 2.4, que recibe el nombre de *triángulo de Pascal o de Tartaglia*. Obsérvese que la suma de cada una de las filas es igual a 2^n, es decir, el total de subconjuntos de un conjunto de n elementos (véase el ejemplo 2.8). Esto puede probarse también gracias al teorema del binomio.

Teorema 2.8.- (Teorema del binomio) *Sean a y b números reales y $n \geq 1$, entonces se cumple*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n.\end{aligned}$$

Demostración. Se tiene que $(a+b)^n = \overbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}^{n \text{ veces}}$. Por lo tanto, obtenemos un término de la forma $a^{n-k}b^k$ cuando multiplicamos a de $n-k$ factores y b de k factores. Pero esto puede hacerse de $\binom{n}{k}$ formas, ya que basta especificar los k factores, de los n posibles, correspondientes a las b. ■

Como consecuencia de este teorema se pueden deducir algunas relaciones relevantes como las que se apuntan a continuación:

1.- La función generadora de los números binomiales $\binom{n}{k}$ es $(1+x)^n$ ya que:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

2.- $\displaystyle\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$

3.- $\displaystyle\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$

Tabla 2.4: Triángulo de Pascal para el cálculo recursivo de los coeficientes binomiales

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & & & \searrow\ \swarrow & & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
 & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & & & \searrow\ \swarrow & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

4.- $\displaystyle \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$

Las relaciones 2 y 3 son inmediatas de ver sin más que tomar $a = b = 1$ en el primer caso y $a = 1$, $b = -1$ en el segundo caso. La cuarta de las relaciones surge de la aplicación del teorema del binomio para $(1 + x)^{2n}$, ya que

$$(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n (1 + x)^n$$

y entonces

$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} x + \cdots + \binom{2n}{n} x^n + \cdots + \binom{2n}{2n} x^{2n} = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \cdots + \binom{n}{n} x^n \right]^2 .$$

La identidad se obtiene al comparar los coeficientes de x^n.

Los ejemplos en los que podemos aplicar combinaciones son muchos. Por ejemplo, nos sirven para calcular las probabilidades de acertar en la primitiva.

Ejemplo 2.17.- *Calcula la probabilidad de acertar en un sorteo de lotería primitiva los 6 números de la combinación ganadora. Calcula también la probabilidad de acertar 5 y el complementario.*

Como en ejemplos anteriores, la probabilidad se obtiene a través del cociente

$$p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}.$$

Ahora bien, los casos posibles son todas las elecciones de 6 números de entre 49, esto es

$$\text{casos posibles } = \binom{49}{6} = 13\,983\,816.$$

Por otra parte, sólo hay un caso favorable para acertar los 6 números y entonces la probabilidad pedida es

$$p_6 = \frac{1}{13\,983\,816} = 7{,}151123842018516 \times 10^{-8}.$$

Para calcular ahora la probabilidad de acertar 5 más el complementario, notemos que deberemos haber marcado necesariamente el complementario y 5 números más de entre los otros 6 de la extracción. Por lo tanto los casos favorables son $\binom{6}{5} = 6$ y la probabilidad pedida es

$$p_{5+c} = \frac{6}{13\,983\,816} = 4{,}29067430521111 \times 10^{-7},$$

que como se ve es 6 veces mayor que la de acertar los 6 números.

Para completar este ejercicio, se puede calcular la probabilidad de tener 5, 4 ó 3 aciertos en un sorteo de la lotería primitiva. En concreto, se tiene que $p_5 = 0{,}0000180208$, $p_4 = 0{,}00096862$ y $p_3 = 0{,}0176504$. ■

Ejemplo 2.18.- *Dado el conjunto $\mathbb{N}_{2n}$, calcula el total de subconjuntos que tienen igual de números pares que de impares.*

Podemos dividir el conjunto $\mathbb{N}_{2n}$ en dos partes disjuntas, separando los números pares de los impares. De este modo, formamos los conjuntos

$$\mathcal{P} = \{k \in \mathbb{N}_{2n}; k\,\text{es par}\}, \qquad \mathcal{I} = \{k \in \mathbb{N}_{2n}; k\,\text{es impar}\},$$

que tienen cada uno de ellos n elementos.

Así, para formar un subconjunto con el mismo número de pares que de impares hay que tomar igual número de elementos del conjunto $\mathcal{P}$ que del $\mathcal{I}$. En este sentido, si tomamos k elementos de cada conjunto, el total de subconjuntos con k pares y k impares es $\binom{n}{k}\binom{n}{k}$. Por lo tanto el total de subconjuntos será

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$$

y por la relación 4 de los coeficientes binomiales esto es igual a $\binom{2n}{n}$.

Este resultado puede obtenerse directamente si nos fijamos en lo siguiente. Cada vez que elegimos un subconjunto de n elementos de $\mathbb{N}_{2n}$, automáticamente se forma otro con otros n elementos. Llamemos a estos subconjuntos A y B. Resulta que si A tiene k números pares entonces tiene $n-k$ impares y, por lo tanto, B tiene $n-k$ pares y k impares. Juntemos ahora los k números pares de A con los k números impares de B y entonces tenemos un subconjunto con tantos números pares como impares. Es decir, a cada elección de n elementos de $\mathbb{N}_{2n}$ le corresponde un conjunto con el mismo número de pares que de impares y, a la inversa, a cada subconjunto C con el mismo número de pares que de impares le corresponde un subconjunto de n elementos de $\mathbb{N}_{2n}$ (basta con tomar $A = \{x \in C; x\,\text{par}\} \cup \{y \in \mathbb{N}_{2n} \setminus \{C\}; y\,\text{impar}\}$). Por lo tanto el total de subconjuntos con la misma cantidad de pares que de impares es igual al total de selecciones de n elementos de entre los $2n$ de $\mathbb{N}_{2n}$, esto es, $\binom{2n}{n}$. ■

2.9. Combinaciones con repetición

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto de n elementos. Una *combinación con repetición de orden* k (o una combinación con repetición de n elementos tomados de k en k) es un conjunto de k elementos formado con elementos de A, donde éstos se pueden repetir. Esto equivale a dar una lista no ordenada de longitud k, formada con elementos de A, los cuales se pueden repetir.

Dar una lista de estas características es lo mismo que decir cuántas veces aparece en la lista cada uno de los elementos de A. De este modo hay una correspondencia uno a uno entre las combinaciones con repetición de orden k y las soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = k.$$

Cada $x_i \geq 0$ es el número de veces que aparece en la lista el elemento a_i.

Ejemplo 2.19.- *¿De cuántas maneras pueden colorearse cinco pelotas con dos colores?*

Esto equivale a dar una lista no ordenada de longitud 5, formadas con los dos colores disponibles, supongamos b y r. O lo que es lo mismo, decir cuántas pelotas pintamos de cada color. Por lo tanto a cada solución de la ecuación

$$x_1 + x_2 = 5$$

le corresponde una combinación con repetición de 2 elementos tomados de 5 en 5. Como las posibles soluciones son

$$\begin{array}{llcll} x_1 = 5, & x_2 = 0; & \quad & x_1 = 2, & x_2 = 3; \\ x_1 = 4, & x_2 = 1; & & x_1 = 1, & x_2 = 4; \\ x_1 = 3, & x_2 = 2; & & x_1 = 0, & x_2 = 5, \end{array}$$

el total de combinaciones con repetición de 2 elementos tomados de 5 en 5 es 6. ■

Para calcular el total de combinaciones con repetición de n elementos de orden k ($\mathrm{CR}(n,k)$) podemos proceder de dos formas. En primer lugar observemos que toda combinación con repetición puede escribirse como una secuencia de ceros y unos. En efecto, escribamos tantos unos como veces aparezca el elemento a_1 en la combinación, a continuación escribamos un 0, para indicar que vamos a empezar a contar el elemento a_2. A continuación escribamos tantos unos como veces esté a_2 en la combinación y así sucesivamente. Al final habremos escrito k unos y $n-1$ ceros, es decir, tantos unos como elementos hay en la combinación y tantos ceros como separadores se necesitan entre los elementos de A. Veamos la relación entre las secuencias de ceros y unos y las combinaciones con repetición para el caso del ejemplo 2.19.

$$\begin{array}{llclcl} x_1 = 5, & x_2 = 0, & \longrightarrow & x_1x_1x_1x_1x_1 & \longrightarrow & 111110, \\ x_1 = 4, & x_2 = 1, & \longrightarrow & x_1x_1x_1x_1x_2 & \longrightarrow & 111101, \\ x_1 = 3, & x_2 = 2, & \longrightarrow & x_1x_1x_1x_2x_2 & \longrightarrow & 111011, \\ x_1 = 2, & x_2 = 3, & \longrightarrow & x_1x_1x_2x_2x_2 & \longrightarrow & 110111, \\ x_1 = 1, & x_2 = 4, & \longrightarrow & x_1x_2x_2x_2x_2 & \longrightarrow & 101111, \\ x_1 = 0, & x_2 = 5, & \longrightarrow & x_2x_2x_2x_2x_2 & \longrightarrow & 011111. \end{array}$$

Como la correspondencia entre secuencias de ceros y unos y combinaciones con repetición es biyectiva resulta

$$\mathrm{CR}(n,k) = \binom{n+k-1}{k},$$

ya que basta especificar la posición de los k unos en la secuencia de longitud $n+k-1$ de ceros y unos.

También puede calcularse $\mathrm{CR}(n,k)$ de forma recursiva como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 2.9 *Si $n, k > 1$, entonces*

$$CR(n,k) = CR(n-1,k) + CR(n,k-1),$$

con $CR(n,1) = n$ y $CR(1,k) = 1$.

Demostración. Tomemos a_1 como elemento de referencia. Las combinaciones con repetición podemos dividirlas en dos clases: las que tienen al elemento a_1 y las que no. De la segunda clase es evidente que hay tantas como combinaciones con repetición de $n-1$ elementos tomados de k en k. Para saber ahora cuántas hay de la primera clase procedemos de la siguiente forma. Puesto que hay por lo menos un elemento a_1, quitamos uno y nos queda una combinación con repetición de n elementos tomados de $k-1$ en $k-1$. Por lo tanto,

$$\mathrm{CR}(n,k) = \mathrm{CR}(n-1,k) + \mathrm{CR}(n,k-1).$$

Por otra parte, es evidente que $\mathrm{CR}(n,1) = n$ y $\mathrm{CR}(1,k) = 1$. Así, podemos calcular las combinaciones con repetición mediante el esquema que se indica en la tabla 2.5. ■

Tabla 2.5: Cálculo recursivo de las combinaciones con repetición.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{CR}(1,1)=1 & & \mathrm{CR}(1,2)=1 & & \mathrm{CR}(1,3)=1 & & \mathrm{CR}(1,4)=1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{CR}(2,1)=2 & \rightarrow & \mathrm{CR}(2,2)=3 & \rightarrow & \mathrm{CR}(2,3)=4 & \rightarrow & \mathrm{CR}(2,4)=5 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{CR}(3,1)=3 & \rightarrow & \mathrm{CR}(3,2)=6 & \rightarrow & \mathrm{CR}(3,3)=10 & \rightarrow & \mathrm{CR}(3,4)=15 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{CR}(4,1)=4 & \rightarrow & \mathrm{CR}(4,2)=10 & \rightarrow & \mathrm{CR}(4,3)=20 & \rightarrow & \mathrm{CR}(4,4)=35
\end{array}$$

Las combinaciones con repetición también pueden entenderse como *distribuciones*. De hecho, el problema de dar una lista no ordenada de longitud k, formada con los n elementos del conjunto A, donde éstos se pueden repetir, es equivalente a distribuir k objetos idénticos en n cajas etiquetadas. Resulta evidente que una tal distribución puede asociarse con una solución en enteros no negativos de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = k,$$

donde x_i representa el número de objetos que recibe la caja i-ésima. Pero esto mismo sucedía con las combinaciones con repetición.

Ejemplo 2.20.- *¿De cuántas formas pueden distribuirse 10 objetos idénticos en 5 cajas diferentes si ninguna puede quedar vacía?*

Como acabamos de ver, si llamamos x_i al número de objetos que recibe cada caja, el problema se reduce a calcular el total de soluciones de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10,$$

con la condición $x_i \geq 1$.

Puesto que cada caja recibe por lo menos un objeto, podemos considerar que ya tenemos 5 objetos distribuidos y nos resta distribuir los otros 5 sin ninguna restricción. Por lo tanto, el total de distribuciones será el total de soluciones de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5,$$

con la condición $x_i \geq 0$. Pero esto es $\mathrm{CR}(5,5) = 126$. ■

Ejemplo 2.21.- *¿Cuántos números menores que* 1 000 000 *son tales que sus cifras suman 15?*

Los números menores que 1 000 000 pueden ser considerados como números de seis cifras, donde éstas pueden ser cero en cualquiera de las posiciones. Así, el número 567 puede verse como 000567. Teniendo esto en cuenta y llamando c_i a las cifras del número, se tiene que cumplir que

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 15, \tag{2.3}$$

con la condición $0 \leq c_i \leq 9$.

Si no hubiera restricciones, el total de soluciones de la ecuación (2.3) sería $\mathrm{CR}(6,15) = 15\,504$. Ahora bien, aquí estamos contando soluciones para las que alguna de las cifras es mayor que 9. Por lo tanto hay que descontar todas estas posibles soluciones.

Supongamos que una de las cifras, por ejemplo la última, valiera 10, entonces, las otras 5 deberían sumar 5. Si valiera 11, las otras sumarían 4. Si valiera 12, las otras sumarían 3, y así sucesivamente.

Entonces, hay que restar todas las soluciones de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=5,\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=4,\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=3,\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=2,\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=1,\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Estas son $\mathrm{CR}(5,5)+\mathrm{CR}(5,4)+\mathrm{CR}(5,3)+\mathrm{CR}(5,2)+\mathrm{CR}(5,1)+\mathrm{CR}(5,0) = 126+70+35+15+5+1 = 252$.

Puesto que la cifra que puede valer más de 9 es cualquiera de las 6, la solución del problema será

$$15\,504 - 6\cdot 252 = 13\,992.$$

Veamos una forma de encontrar una solución más compacta del sistema de ecuaciones (2.4). Estas 6 ecuaciones se pueden resumir en la desigualdad

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \le 5.$$

Si introducimos una sexta variable x_6 y transformamos la desigualdad en igualdad, tendremos la ecuación

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 5. \tag{2.5}$$

Puesto que $0\le x_6\le 5$, resulta que cuando $x_6=0$, las otras cinco variables satisfacen la primera de las ecuaciones en (2.4). Si $x_6=1$ las otras cinco variables satisfacen la segunda ecuación en (2.4) y así sucesivamenete. Por lo tanto, las soluciones de (2.4) son las soluciones de (2.5), es decir, $\mathrm{CR}(6,5)=252$. Haciendo la misma consideración que antes, la solución del problema es $\mathrm{CR}(6,15)-6\cdot\mathrm{CR}(6,5)=13\,992$. ■

2.10. Permutaciones con repetición

Consideremos un conjunto $A=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ de k elementos y una lista ordenada de longitud n donde el elemento a_1 se repite α_1 veces, el a_2 α_2 veces y, en general, el a_i, α_i veces ($\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=n$ y $\alpha_i\ge 1$). Esto es equivalente a distribuir n objetos diferentes en k cajas, de modo que la caja i-ésima recibe α_i objetos. También puede interpretarse como una aplicación de un conjunto de n elementos en otro conjunto de k elementos A tal que envía α_1 elementos a a_1, …, α_k elementos a a_k.

El total de listas distintas de longitud n formadas con α_1 veces a_1, …, α_k veces a_k se representa por

$$P(n;\alpha_1,\dots,\alpha_k)=\binom{n}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k},\qquad \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=n,\quad \alpha_i\ge 1.$$

Este número se conoce como *coeficiente multinomial.*

Teorema 2.10.- *Se satisface la siguiente igualdad:*

$$\binom{n}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}=\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_k!}.$$

Demostración. Podemos probarlo de dos formas diferentes. Visto el problema como una distribución de n objetos diferentes en k cajas, de forma que la caja i-ésima recibe α_i objetos, basta con determinar cuáles son los objetos que van a parar a cada una de las cajas. Como la primera caja recibe α_1 objetos, ésta puede recibir un total de $\binom{n}{\alpha_1}$ colecciones distintas de α_1 objetos. La segunda caja podrá recibir cualquier colección de α_2 objetos de los $n-\alpha_1$ restantes y así sucesivamente. Por tanto se tiene

$$\begin{aligned}\binom{n}{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}&=\binom{n}{\alpha_1}\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}\binom{n-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3}\cdots\binom{\alpha_k}{\alpha_k}\\ &=\frac{n!}{\alpha_1!(n-\alpha_1)!}\,\frac{(n-\alpha_1)!}{\alpha_2!(n-\alpha_1-\alpha_2)!}\,\frac{(n-\alpha_1-\alpha_2)!}{\alpha_3!(n-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)!}\cdots\frac{\alpha_k!}{\alpha_k!},\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado, sin más que simplificar.

La otra forma de verlo es considerando las ordenaciones de los n elementos. Si todos fueran diferentes habría $n!$ ordenaciones. Ahora bien, como el primer elemento, a_1, se repite α_1 veces, la ordenación no cambiará si se intercambian entre sí los elementos a_1. Como se pueden intercambiar de $\alpha_1!$ formas distintas, el total de ordenaciones habrá que dividirlo por ese factor. Razonando análogamente con el resto de elementos, se llega al resultado pedido

$$\binom{n}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_k!}. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 2.22.- *Calcula el número de palabras distintas que se pueden hacer reordenando las letras de ABRACADABRA.*

Sea el conjunto $X = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{R}\}$. ABRACADABRA es una lista ordenada de elementos de X de longitud 11, donde A se repite 5 veces, B 2 veces, C una vez, D una vez y R dos veces. Esto es lo mismo que haber construido la siguiente aplicación de $\mathbb{N}_{11}$ en X

$$\begin{aligned}
&f : \mathbb{N}_{11} \longrightarrow X = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{R}\};\\
&f(1) = f(4) = f(6) = f(8) = f(11) = \mathrm{A}\\
&f(2) = f(9) = \mathrm{B}\\
&f(3) = f(10) = \mathrm{R}\\
&f(5) = \mathrm{C}\\
&f(7) = \mathrm{D}
\end{aligned}$$

o bien haber distribuido los objetos de N_{11} en las cajas A, B, C, D, R, de forma que la caja A recibe los objetos 1, 4, 6, 8, 11, la B los objetos 2 y 9, la C el objeto 5, la D el objeto 7 y la R los objetos 3 y 10.

El número de palabras distintas que se pueden hacer con las letras de ABRACADABRA es, por tanto,

$$\binom{11}{5\,2\,2} = \frac{11!}{5!2!2!} = 83\,160. \qquad \blacksquare$$

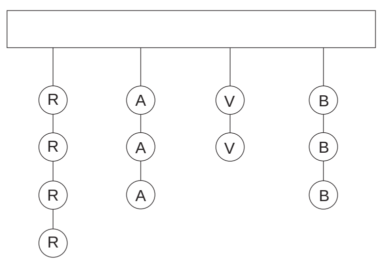


Figura 2.4: Disposición de los platillos para el ejemplo 2.23.

Ejemplo 2.23.- *Doce platillos de forma idéntica se ordenan en cuatro columnas verticales, como se muestra en la figura 2.4. Hay cuatro de color rojo en la primera columna, tres de color azul en la segunda columna, dos verdes en la tercera columna y tres blancos en la cuarta. Para entrar en el equipo de tiro de la universidad es necesario romper los doce platillos (usando sólo 12 balas) y para esto siempre se debe romper el platillo que queda en la parte inferior de alguna de las columnas. En estas condiciones, ¿de cuántas formas se puede disparar y romper los 12 platillos?*

El problema es equivalente a ordenar los 12 platillos. Por ejemplo, la ordenación

$$RRBAAVRVBBAR$$

significa que primero disparamos a dos platillos rojos, luego a uno blanco, después a dos azules, etc. Por tanto la solución del problema son las ordenaciones de 12 elementos del conjunto $\{R, A, V, B\}$, donde R se repite 4 veces, A tres veces, V dos veces y B tres veces, es decir

$$\binom{12}{4\,3\,2\,3} = \frac{12!}{4!3!2!3!} = 277\,200. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 2.24.- *¿Cuál es la probabilidad de que al repartir una mano de tute, con una baraja española de 40 cartas, cada jugador reciba un as?*

Como en ejemplos anteriores, la probabilidad pedida es

$$p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}.$$

Para determinar los casos posibles, vemos que lo que tenemos que hacer es distribuir 40 cartas distintas entre 4 jugadores diferentes, de forma que cada jugador recibe 10 cartas. Esto, según hemos visto es

$$\text{casos posibles} = \binom{40}{10\,10\,10\,10} = \frac{40!}{10!^4}.$$

Otra forma de llegar al mismo resultado es viendo que el primer jugador puede recibir un total de $\binom{40}{10}$ manos distintas, el segundo $\binom{30}{10}$, el tercero $\binom{20}{10}$ y el último $\binom{10}{10}$, Es decir

$$\text{casos posibles} = \binom{40}{10}\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10} = \frac{40!}{10!^4}.$$

Para determinar los casos favorables, dividimos el problema en dos partes. En primer lugar repartimos los ases entre los 4 jugadores (4! formas diferentes) y después distribuimos las 36 cartas restantes. Razonando como antes se tiene

$$\text{casos favorables} = 4!\binom{36}{9\,9\,9\,9} = 4!\frac{36!}{9!^4}.$$

Por tanto $p = \dfrac{4!\,36!\,10!^4}{40!\,9!^4} = 0{,}109421.$ $\blacksquare$

2.11. Particiones

Una *partición* de un conjunto A de n elementos en k partes es una familia de k subconjuntos disjuntos no vacíos de A tales que su unión es el propio conjunto A. De esta forma si A_1, A_2, ..., A_k son los subconjuntos de la partición, entonces

1.- A_j no vacío.

2.- $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

3.- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = A$.

¿Cuántas particiones diferentes se pueden hacer de un conjunto de n elementos en k partes? Denotemos a tal número $\left\{ n \atop k \right\}$, que recibe el nombre de *número de Stirling de segunda clase.*

Vamos a examinar un caso concreto con la idea de encontrar un procedimiento que podamos generalizar para obtener $\left\{ n \atop k \right\}$. Supongamos que queremos contar todas las particiones de un conjunto de 4 elementos en dos partes, $\left\{ 4 \atop 2 \right\}$.

Primera aproximación. Hay dos tipos de particiones:

a) Las que están formadas por dos subconjuntos de dos elementos

b) Las que están formadas por uno de tres elementos y otro de uno.

Las de tipo *b)* se pueden contar fácilmente. Habrá 4 de ellas, ya que el subconjunto que sólo tiene un elemento puede elegirse de 4 formas distintas, tantas como elementos tiene el conjunto.

Para contar las de tipo *a)* podemos pensar que elegida una de las partes, la otra queda fijada. Como elegir una parte es elegir 2 elementos entre 4, resultará que hay $\binom{4}{2}$ particiones de este tipo. Por tanto el total de particiones sería $4 + \binom{4}{2} = 10$.

Sin embargo el total de particiones es 7. De alguna manera hemos contado de más en el razonamiento anterior. En efecto, consideremos la forma en que hemos contado las particiones de tipo *a)*. Hemos tomado una de las partes de todas las formas posibles con la seguridad de que la otra parte queda completamente determinada. Examinemos esto más despacio:

parte seleccionada	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$
parte que queda determinada	$\{3,4\}$	$\{2,4\}$	$\{2,3\}$	$\{1,4\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2\}$

Como vemos, la selección $\{1,2\}$ y la $\{3,4\}$ dan lugar a la misma partición. Lo mismo sucede con la $\{1,3\}$ y la $\{2,4\}$ o la $\{1,4\}$ y la $\{2,3\}$. En realidad cada partición aparece dos veces, por lo que sólo hay 3 particiones distintas de tipo *a)*, lo que hace un total de 7.

Segunda aproximación. Como antes, dividiremos las particiones en dos tipos:

a) Las que el $\{4\}$ es una de las partes.

b) El resto de particiones, es decir aquéllas en las que el 4 está en una de las partes junto a otros elementos.

De las del tipo *a)* sólo hay una, pues el resto de elementos tiene que formar necesariamente la otra parte.

Las del segundo tipo pueden contarse si prescindimos del 4 y nos dedicamos a distribuir los otros 3 elementos en dos partes. Esto se puede hacer de 3 formas

$$[\{1\}, \quad \{2,3\}] \quad [\{2\}, \quad \{1,3\}] \quad [\{3\}, \quad \{1,2\}]$$

Ahora insertemos el elemento 4 de todas las formas posibles en cada una de las partes

$$\begin{array}{ccc} [\{1\}, \quad \{2,3\}] & [\{2\}, \quad \{1,3\}] & [\{3\}, \quad \{1,2\}] \\ \nwarrow \; \nearrow & \nwarrow \; \nearrow & \nwarrow \; \nearrow \\ 4 & 4 & 4 \end{array}$$

Hemos generado 6 particiones, lo que hace un total de 7.

Esta segunda forma de contar las particiones es la que se puede generalizar para llegar al siguiente resultado

Teorema 2.11.- *Los números de Stirling de segunda clase satisfacen la siguiente relación de recurrencia:*

$$\begin{cases} \left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \left\{ n-1 \atop k \right\}, & n,k > 1, \\ \left\{ n \atop 1 \right\} = 1, \quad \left\{ n \atop n \right\} = 1. \end{cases}$$

Demostración. Basta seguir la segunda aproximación de antes. Consideremos dos tipos de particiones

- $\{n\}$ es una de las partes. El resto de $n-1$ elementos están en $k-1$ partes. En total $\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$.
- n está en alguna de las partes con más elemenos. Prescindamos de n, entonces el resto de $n-1$ elementos está en k partes. Como el elemento n puede introducirse en cualquiera de las k partes, tenemos un total de $k\left\{ n-1 \atop k \right\}$.

Como sólo hay estos dos tipos de particiones se sigue que

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \left\{ n-1 \atop k \right\}. \tag{2.6}$$

Por otra parte es evidente que $\left\{ n \atop 1 \right\} = 1$, ya que sólo es posible dividir un conjunto en una parte. Del mismo modo es trivial que $\left\{ n \atop n \right\} = 1$. ∎

Tabla 2.6: Cálculo recursivo de los números de Stirling de segunda clase.

n	${n \brace 1}$		${n \brace 2}$		${n \brace 3}$		${n \brace 4}$		${n \brace 5}$		${n \brace 6}$		${n \brace 7}$
			$\times 2$		$\times 3$		$\times 4$		$\times 5$		$\times 6$		$\times 7$
1	1												
2	1		1										
		$\searrow$	$\downarrow$										
3	1		3		1								
		$\searrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\downarrow$								
4	1		7		6		1						
		$\searrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\downarrow$						
5	1		15		25		10		1				
		$\searrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\downarrow$				
6	1		31		90		65		15		1		
		$\searrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\downarrow$		
7	1		63		301		350		140		21		1

Para algunos valores concretos de k, podemos dar una fórmula explícita para los números de Stirling de segunda clase.

Teorema 2.12.- *Se tienen las siguientes relaciones para los números de Stirling de segunda clase:*

$${n \brace 2} = 2^{n-1} - 1, \qquad {n \brace n-1} = \binom{n}{2}, \qquad {n \brace 3} = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 2^n + 1),$$

donde se ha supuesto $n \geq 2$ en los dos primeros casos y $n \geq 3$ en el tercero.

Demostración. La demostración de estas fórmulas se puede hacer por inducción, sin más que tener en cuenta la recurrencia dada en el Teorema 2.11. También pueden obtenerse estas fórmulas usando técnicas de funciones generadoras, que se introducirán en el siguiente capítulo. Para ello, basta considerar que ${n \brace k}$ es el total de maneras de distribuir n objetos diferentes en k cajas, sin que ninguna quede vacía. ■

El teorema 2.11 nos proporciona una forma recursiva de calcular los números de Stirling de segunda clase, como se ve en la tabla 2.6. No obstante, al igual que con los números de Stirling de primera clase, podemos encontrar estos números en otro contexto.

Consideremos el producto de potencias decrecientes de x

$$x^{\underline{k}} = \overbrace{x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)}^{k \text{ factores}},$$

y tratemos de expresar una potencia de x en términos de potencias decrecientes. Resulta que

$$\begin{aligned}
x &= x^{\underline{1}}, \\
x^2 &= x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}, \\
x^3 &= x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}, \\
x^4 &= x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}, \\
&\vdots \\
x^k &= {k \brace k} x^{\underline{k}} + {k \brace k-1} x^{\underline{k-1}} + {k \brace k-2} x^{\underline{k-2}} + \cdots + {k \brace 2} x^{\underline{2}} + {k \brace 1} x^{\underline{1}},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

ya que se cumple $x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + k \cdot x^{\underline{k}}$. Además, no es difícil comprobar que $x^n = \sum_{k=1}^{n} {n \brace k} (-1)^k x^{\overline{k}}$.

De alguna forma, (2.7) puede verse como la forma de invertir la ecuación (2.2). Estas expresiones son de utilidad a la hora de sumar algunas series infinitas, como las series exponenciales o las aritmético-geométricas.

Los números de Stirling tienen también aplicaciones en problemas de distribuciones, como los que se muestran a continuación.

Ejemplo 2.25.- *Una familia formada por el padre, la madre, el abuelo, el hijo y la hija se alojan en un hotel donde hay tres habitaciones distintas, una de lujo, otra normal y otra económica. ¿De cuántas maneras se pueden distribuirse los* 5 *miembros de la familia entre las* 3 *habitaciones si ninguna queda vacía?*

Podemos resolver este problema de dos formas diferentes. La primera, usando los números de Stirling de segunda clase. En efecto, el número $\left\{ {5 \atop 3} \right\}$ nos dice de cuántas formas se pueden distribuir las 5 personas en 3 grupos. Si las habitaciones fueran iguales, ya tendríamos la solución. Pero como son distintas, una vez que tenemos los tres grupos, tenemos que calcular de cuántas formas se pueden distribuir entre las tres habitaciones distintas, esto es, 3!. Usando el Teorema 2.12, la solución total es:

$$3!\left\{ {5 \atop 3} \right\} = 6\frac{1}{2}(3^4 - 2^5 + 1) = 150.$$

La segunda solución del problema es la siguiente. En la tabla 2.7 se muestran las posibles distribuciones de los diferentes miembros de la familia en las habitaciones del hotel

Tabla 2.7: Posibles distribuciones de personas en las habitaciones del ejemplo 2.25.

Lujo	Normal	Económica
3	1	1
2	2	1
2	1	2
1	2	2
1	3	1
1	1	3

Teniendo en cuenta que $PR(n; \alpha_1 \ldots, \alpha_k)$ son las formas de distribuir n personas diferentes en k habitaciones de modo que la habitación i-ésima reciba α_i personas, tenemos que la solución es

$$\begin{aligned} &PR(5; 3, 1, 1) + PR(5; 2, 2, 1) + PR(5; 2, 1, 2) + PR(5; 1, 2, 2) \\ &+ PR(5; 1, 3, 1) + PR(5; 1, 1, 3) = 3\frac{5!}{3!} + 3\frac{5!}{2!2!} = 150. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Un problema general de distribuciones admite la siguiente solución.

Ejemplo 2.26.- *¿De cuántas maneras pueden distribuirse n objetos distintos en k cajas diferentes si ninguna caja puede estar vacía?*

Podemos pensar una de estas distribuciones como en una partición del conjunto de n elementos. De hecho, una distribución divide al conjunto en k partes. Sin embargo, al realizar una partición sólo se tiene en cuenta cuáles son las partes y no se les asigna ningún orden, cosa que sí ocurre con las distribuciones. Es por eso que distintas distribuciones pueden originar la misma partición. De hecho, cada partición da lugar a $k!$ distribuciones diferentes, ya que no hay más que ordenar de todas las formas posibles las partes para generar las distintas distribuciones. Por lo tanto el total de distribuciones será $k!\left\{ {n \atop k} \right\}$.

Puede razonarse de otro modo para ver que

$$k!\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=n \\ \alpha_j \geq 1}} \binom{n}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k},$$

lo que proporciona una fórmula explícita para calcular los números de Stirling de segunda clase.

$\blacksquare$

2.12. Problemas resueltos

1. Cristina se presenta a unas oposiciones donde hay 68 temas posibles para estudiar. En la oposición se realiza un sorteo con 68 bolas, una por cada tema. Se sacan 5 bolas y el opositor tiene que elegir uno para desarrollar. Cristina es una estudiante concienzuda: si se estudia un tema, es seguro que lo desarrollará bien y podrá aprobar la oposición. El problema es que no tiene tiempo suficiente para estudiar los 68 temas. ¿Cuál es el número de temas que debería estudiar Cristina para tener un 50 % de posibilidades de aprobar? ¿Y para tener un 75 % de posibilidades de aprobar?

   Solución. El número de extracciones distintas de 5 bolas de un total de 68 es $\binom{68}{5} = 10\,424\,128$. Supongamos que Cristina se estudia k temas, con $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le 68$. La probabilidad de que en el sorteo no salga ninguno de los temas estudiados por Cristina es $\binom{68-k}{5}/\binom{68}{5}$. En consecuencia, la probabilidad de que en el sorteo salga alguno de los temas estudiados por Cristina es
   $$1 - \frac{\binom{68-k}{5}}{\binom{68}{5}}, \quad 1 \le k \le 68.$$
   En la tabla 2.8 se muestran algunos valores de esta probabilidad, para distintos valores de k. Como se puede ver, estudiando 9 temas, la probabilidad de aprobar la oposición ya supera el

Tabla 2.8: Probabilidad de que Cristina apruebe su oposición, en función del número de temas estudiados.

k	Probabilidad	k	Probabilidad	k	Probabilidad
1	0.0735	11	0.5983	21	0.8528
2	0.1426	12	0.6335	22	0.8685
3	0.2076	13	0.6662	23	0.8827
4	0.2685	14	0.6966	24	0.8958
5	0.3257	15	0.7247	25	0.9076
6	0.3792	16	0.7506	26	0.9183
7	0.4292	17	0.7746	27	0.9281
8	0.4760	18	0.7967	28	0.9368
9	0.5197	19	0.8170	29	0.9447
10	0.5604	20	0.8357	30	0.9518

   50 %. Para tener un 75 % de posibilidades de aprobar hay que estudiar 16 temas. ■

2. Calcula el total de ordenaciones de la palabra BUENAVENTURA de modo que haya dos pares de letras idénticas consecutivas y otros dos pares de letras idénticas no consecutivas (por ejemplo dos As y dos Ns consecutivas, pero no dos Es ni dos Us).

   Solución. Supongamos, en primer lugar, que los pares de letras consecutivas corresponden a las dos As y a las dos Ns. El total de palabras que tienen dos As y dos Ns consecutivas son
   $$\frac{10!}{2!2!}.$$
   Se permutan 10 elementos (B, U, E, V, E, T, U, R, AA, NN) de los cuales hay dos que están repetidos dos veces (las dos Es y las dos Us). Del total de ordenaciones hay que descontar aquéllas en las que hay dos Us o dos Es seguidas. Las que tienen dos Es consecutivas son, de forma análoga,
   $$\frac{9!}{2!}.$$
   Ahora hemos permutado 9 elementos (B, U, V, T, U, R, EE, AA, NN), donde hay uno que se repite dos veces (la U). Igualmente, hay $9!/2!$ ordenaciones con dos Us consecutivas.

   Una vez descontado esto del total tenemos
   $$\frac{10!}{2!2!} - 2\frac{9!}{2!},$$

que no es lo que buscamos, ya que hemos descontado dos veces aquellas ordenaciones en las que las cuatro parejas de letras idénticas están consecutivas. Pero éstas son en total 8!, pues ahora permutamos los 8 elementos (B, V, T, R, UU, EE, AA, NN), que son todos distintos.

Por lo tanto, el total de ordenaciones con dos As y dos Ns consecutivas, pero no dos Es o dos Us es

$$\frac{10!}{2!2!} - 2\frac{9!}{2!} + 8!.$$

Esto es para el caso de As y Ns, pero como esta pareja puede ser cualquiera que pueda formarse con As, Ns, Es o Us, el resultado anterior hay que multiplicarlo por la manera de elegir dos parejas de entre las cuatro posibles, esto es $\binom{4}{2} = 6$. Así, el resultado final es

$$6\left(\frac{10!}{2!2!} - 2\frac{9!}{2!} + 8!\right). \qquad \blacksquare$$

3. Calcula el total de ordenaciones de la palabra HERRAMELLURI que tengan dos y sólo dos Rs consecutivas, pero que no tengan otro par de letras idénticas consecutivas.

Solución. HERRAMELLURI está formada por 12 letras: R, R, R, E, E, L, L, H, A, M, U, I, de las cuales hay una que se repite tres veces (la R), otras dos que se repiten dos veces (la L y la E) y cinco que aparecen una sóla vez (H, A, M, U y I). Si denotamos por X al patrón RR, buscamos aquellas reordenaciones de X, R, E, E, L, L, H, A, M, U, I, en las que no aparezcan los patrones XR, RX, EE ni LL. El número de ordenaciones totales es

$$\frac{11!}{2!2!} = 9\,979\,200.$$

A estas hay que descontar todas aquellas ordenaciones que contienen los patrones XR, RX, EE y LL. Para ello, definimos los conjuntos

- $X_1 = \{$Palabras que contienen el patrón RX$\}$.
- $X_2 = \{$Palabras que contienen el patrón XR$\}$
- $X_3 = \{$Palabras que contienen dos Es consecutivas$\}$.
- $X_4 = \{$Palabras que contienen dos Ls consecutivas$\}$.

Se trata de calcular el cardinal de $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$, teniendo en cuenta que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

$$|X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4| = |X_1| + |X_2| + |X_3| + |X_4| - |X_1 \cap X_3| - |X_1 \cap X_4|$$

$$-|X_2 \cap X_3| - |X_2 \cap X_4| - |X_3 \cap X_4| + |X_1 \cap X_3 \cap X_4| + |X_2 \cap X_3 \cap X_4|.$$

$|X_1|$ son las ordenaciones de RX, E, E, L, L, H, A, M, U, I, es decir,

$$|X_1| = \frac{10!}{2!2!} = 907\,200.$$

Análogamente, se tiene que $|X_2| = 907\,200$.

$|X_3|$ son las ordenaciones de R, X, EE, L, L, H, A, M, U, I, es decir,

$$|X_3| = \frac{10!}{2!} = 1\,814\,400.$$

Razonando de forma similar,

$$|X_4| = \frac{10!}{2!} = 1\,814\,400.$$

Por otra parte $|X_1 \cap X_3|$ y $|X_1 \cap X_4|$ son las ordenaciones de RX, EE, L, L, H, A, M, U, I, y de RX, E, E, LL, H, A, M, U, I, es decir,

$$|X_1 \cap X_3| = |X_1 \cap X_4| = \frac{9!}{2!} = 181\,440.$$

De forma parecida, se calcula

$$|X_2 \cap X_3| = |X_2 \cap X_4| = 181\,440.$$

$|X_3 \cap X_4|$ son las ordenaciones de R, X, EE, LL, H, A, M, U, I:

$$|X_3 \cap X_4| = 9! = 362\,880$$

Por último, $|X_1 \cap X_3 \cap X_4|$ son las ordenaciones de RX, EE, LL, H, A, M, U, I:

$$|X_1 \cap X_3 \cap X_4| = |X_2 \cap X_3 \cap X_4| = 8! = 40\,320.$$

En consecuencia,

$$|X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4| = 2 \times 907\,200 + 2 \times 1\,814\,400 - 4 \times 181\,440$$
$$- 362\,880 + 2 \times 40\,320 = 4\,435\,200$$

y la solución del problema es $9\,979\,200 - 4\,435\,200 = 5\,544\,000$ ordenaciones posibles. ∎

4. Calcula el total de ordenaciones de la palabra VALDEMADERA de modo que no haya un par de letras idénticas consecutivas.

Solución. VALDEMADERA está formada por 11 letras: A, A, A, D, D, E, E, V, L, M, R, de las cuales hay una que se repite tres veces (la A), otras dos que se repiten dos veces (la D y la E) y cuatro que aparecen una sola vez (V, L, M y R). El número de ordenaciones totales es

$$\frac{11!}{3!2!2!} = 1\,663\,200.$$

A estas hay que descontar todas aquellas ordenaciones que contienen dos Ds, dos Es y dos o tres As. Para ello, definimos los conjuntos

- $X_1 = \{\text{Palabras que contienen dos Ds consecutivas}\}$.
- $X_2 = \{\text{Palabras que contienen dos Es consecutivas}\}$.
- $X_3 = \{\text{Palabras que contienen dos As consecutivas}\}$.

Se trata de calcular el cardinal de $X_1 \cup X_2 \cup X_3$:

$$|X_1 \cup X_2 \cup X_3| = |X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3|$$
$$-|X_2 \cap X_3| + |X_1 \cap X_2 \cap X_3|.$$

$|X_1|$ son las ordenaciones de A, A, A, E, E, DD, V, L, M, R, es decir,

$$|X_1| = \frac{10!}{3!2!} = 302\,400.$$

Análogamente, $|X_2|$ son las ordenaciones de A, A, A, D, D, EE, V, L, M, R, es decir,

$$|X_2| = \frac{10!}{3!2!} = 302\,400.$$

Sin embargo, para calcular $|X_3|$ hay que tener más cuidado, ya que si hallamos el número de ordenaciones de AA, A, D, D, E, E, V, L, M, R, estaríamos contando dos veces las palabras que contienen el patrón AAA. Por lo tanto, a

$$\frac{10!}{2!2!} = 907\,200$$

hay que restarle las ordenaciones de AAA, D, D, E, E, V, L, M, R, que son

$$\frac{9!}{2!2!} = 90\,720.$$

En consecuencia,

$$|X_3| = 907\,200 - 90\,720 = 816\,480.$$

$|X_1 \cap X_2|$ son las ordenaciones de A, A, A, EE, DD, V, L, M, R, es decir,

$$|X_1 \cap X_2| = \frac{9!}{3!} = 60\,480.$$

$|X_1 \cap X_3|$ son las ordenaciones de AA, A, E, E, DD, V, L, M, R, menos las ordenaciones de AAA, E, E, DD, V, L, M, R, es decir,

$$|X_1 \cap X_3| = \frac{9!}{2!} - \frac{8!}{2!} = 161\,280.$$

De forma parecida, se calcula

$$|X_2 \cap X_3| = \frac{9!}{2!} - \frac{8!}{2!} = 161\,280.$$

Por último, $|X_1 \cap X_2 \cap X_3|$ son las ordenaciones de AA, A, EE, DD, V, L, M, R, menos las ordenaciones de AAA, EE, DD, V, L, M, R, es decir,

$$|X_1 \cap X_2 \cap X_3| = 8! - 7! = 35\,280.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}|X_1 \cup X_2 \cup X_3| &= 2 \times 302\,400 + 816\,480 - 60\,480 - 2 \times 161\,280 + 35\,280 \\ &= 1\,073\,520\end{aligned}$$

y la solución del problema es $1\,663\,200 - 1\,073\,520 = 589\,680$ ordenaciones posibles. ■

5. Calcula el total de ordenaciones de la palabra DIFICILISIMO de modo que:

   a) Aparece un bloque de tres Is y otro de dos Is (pueden aparecer los dos bloques consecutivos).
   b) Aparece un bloque de tres Is y otro de dos Is (no pueden aparecer los dos bloques consecutivos).
   c) Aparece únicamente un bloque de tres Is y ninguna otra posible repetición (ni más ni menos de tres Is).
   d) Aparecen todas las Is separadas.

   Solución.

   a) Tenemos 9 símbolos: el bloque de las 3 Is (3I), el bloque de las 2 Is (2I) y las 7 letras que no se repiten. Esto da lugar inicialmente a 9! ordenaciones, de las que hay que descontar las que tienen las 5 Is juntas, pues están contadas dos veces. En definitiva, hay

   $$9! - 8! = 8 \times 8! = 322\,560$$

   ordenaciones.

   b) Ahora hay que quitar dos veces el bloque de las 5 Is:

   $$9! - 2 \times 8! = 7 \times 8! = 282\,240.$$

   c) Agrupamos las tres Is bajo un nuevo símbolo, Y, y calculamos el número de ordenaciones de YIIDFCLSMO:

   $$\frac{10!}{2!} = 5 \times 9!$$

   De aquí habrá que restar las palabras que contengan alguno de los patrones II, IY o YI:

   - $X_1 = \{$Palabras que contienen el patrón II$\}$.
   - $X_2 = \{$Palabras que contienen el patrón IY$\}$
   - $X_3 = \{$Palabras que contienen el patrón YI$\}$.

Se trata de calcular el cardinal de $X_1 \cup X_2 \cup X_3$, teniendo en cuenta que $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$. Por el principio de inclusión-exclusión:

$$\begin{aligned} |X_1 \cup X_2 \cup X_3| &= |X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3| \\ &- |X_2 \cap X_3| + |X_1 \cap X_2 \cap X_3| \\ &= 3 \times 9! - 3 \times 8! = 24 \times 8!. \end{aligned}$$

La solución del problema es

$$45 \times 8! - 24 \times 8! = 21 \times 8! = 846\,720$$

ordenaciones posibles.

Solución alternativa: Consideramos la siguiente ordenación de Y, I, I: – Y – I – I –. Si denotamos x_1 el número de letras antes de la Y, x_2 el número de letras entre la Y y la primera I, x_3 el número de letras entre las dos Is y x_4 el número de letras después de la segunda I, tenemos que encontrar las soluciones de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \quad x_1, x_4 \geq 0, \quad x_2, x_3 \geq 1,$$

o, equivalentemente, las de

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4.$$

Esto da lugar a un total de

$$CR(4,5) = \binom{8}{5}$$

posiciones posibles. Para cada una de estas posiciones, tenemos 7! formas de colocar el resto de las letras no repetidas, es decir

$$7!\binom{8}{5}$$

posiciones. Por último, como hay $3!/2! = 3$ formas de fijar las posiciones de Y, I, I, llegamos a

$$3 \times 7!\binom{8}{5} = 21 \times 8! = 846\,720$$

ordenaciones posibles.

Segunda solución alternativa: Consideramos ahora las 7 letras diferentes y los ocho huecos que quedan entre ellas: – D – F – C – L – S – M – O –. Para cada una de estas distribuciones, buscamos las formas de elegir 3 huecos para colocar los bloques Y, I, I. Esto da lugar a un total de

$$C(8,3) = \binom{8}{3} = 56$$

posibilidades. Este número habrá que multiplicarlo por las permutaciones que podemos hacer con las letras Y, I, I ($3!/2! = 3$) y por las permutaciones de las 7 letras, 7!. En total

$$56 \times 3 \times 7! = 846\,720$$

ordenaciones posibles.

d) Se trata de palabras de la forma – I – I – I – I – I –. Si denotamos x_1 el número de letras antes de la primera I, x_2 el número de letras entre la primera y la segunda I, x_3 el número de letras entre la segunda y la tercera I, x_4 el número de letras entre la tercera y la cuarta I, x_5 el número de letras entre la cuarta y la quinta I y, finalmente, x_6 el número de letras después de la quinta I, tenemos que encontrar las soluciones de

$$x_1 + \cdots + x_6 = 7, \quad x_1, x_6 \geq 0, \quad x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 1,$$

o, equivalentemente, las de

$$y_1 + \cdots + y_6 = 3, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6.$$

Esto da lugar a un total de

$$CR(6,3) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = 56$$

posiciones posibles. Cada una de ellas habrá que multiplicarla por las ordenaciones de las 7 letras distintas, dando lugar a $56 \times 7! = 282\,240$ ordenaciones posibles. ■

2.13. Problemas propuestos

1. Se da un listado formado al azar con 15 millones de palabras de a lo sumo 5 letras en un alfabeto de 27 símbolos. ¿Se puede asegurar que, como mínimo, habrá dos palabras repetidas?

2. Demuestra, usando el principio del palomar, que existe un número formado todo por unos que es divisible por 7.

3. Demuestra que dados 5 puntos en el interior de un triángulo equilátero de lado 1, al menos dos están a una distancia menor que $1/2$. Demuestra también que, dados 10 puntos, al menos dos distan menos de $1/3$.

4. Un *punto reticular* en el espacio tridimensional es un punto que tiene coordenadas enteras. Demuestra que, dados 9 puntos reticulares, existe al menos un par de ellos tal que el punto medio del segmento que los une es también un punto reticular.

5. Prueba que, dados 10 números enteros cualesquiera siempre podemos elegir un subconjunto de ellos cuya suma es múltiplo de 10.

6. En una mesa redonda hay sentadas 100 personas de las cuales más de la mitad son hombres. Demuestra que hay al menos dos hombres sentados diametralmente opuestos.

7. En una empresa hay 45 empleados que trabajan en ocho departamentos diferentes. Si cada empleado trabaja en uno sólo de los departamentos y ningún departamento tiene más de 10 empleados, prueba que por lo menos 3 departamentos tienen 5 o más empleados.

8. De 24 libros de matemática discreta nos interesa saber en qué medida se tratan los temas de aritmética (A), combinatoria (C) y grafos (G). Si el número de libros que contienen material sobre estos temas es: $|A| = 8$, $|C| = 13$, $|G| = 13$, $|A \cap C| = 5$, $|A \cap G| = 3$, $|C \cap G| = 6$, $|A \cap C \cap G| = 2$, ¿cuántos textos no tratan ninguno de los temas? ¿Cuántos tratan un sólo tema?

9. Una encuesta llevada a cabo en un colegio revela que al 90 % de los niños les gusta al menos una de las asignaturas: biología, matemáticas, historia. Al 45 % les gusta la historia, al 28 % las matemáticas, al 46 % la biología, al 6 % le gustan las tres asignaturas y al 27 % sólo les gusta la historia. ¿A cuántos les gusta sólo las matemáticas y la biología? ¿Se tienen todos los datos?

10. En una clase de matemáticas con 67 estudiantes, 47 saben leer francés, 32 saben leer alemán y 23 las dos lenguas. ¿Cuántos no saben leer ninguna de las lenguas? Si además, 20 saben leer ruso, de los cuales 12 también saben francés, 11 alemán y 5 saben las tres, ¿cuántos no saben leer ninguna lengua?

11. Halla el número de maneras de ordenar las letras A, E, M, O, U, Y, N en una sucesión, de forma que no aparezcan las palabras ME, YOU, AN.

12. Calcula el número de ordenaciones de la palabra JUPITER en las que las vocales aparecen en orden alfabético.

13. Una llave se fabrica haciendo incisiones de profundidad variable en ciertas posiciones de una llave virgen. Si hay 8 profundidades diferentes ¿cuántas posiciones se necesitan para fabricar un millón de llaves distintas? Responde a la misma pregunta si sólo pueden hacerse cuatro profundidades diferentes.

14. ¿De cuántas maneras pueden disponerse 8 torres en un tablero de ajedrez sin que se amenace ninguna de ellas?

15. Calcula el número de maneras en que pueden seleccionarse dos cuadros, de un tablero de ajedrez, sin que estén en la misma fila o columna.

16. ¿De cuántas formas pueden alinearse m chicas y n chicos si las chicas siempre tienen que estar juntas?

17. De los números menores que 1 000 000 calcula:
    a) ¿Cuántos tienen al menos una cifra repetida?
    b) ¿Cuántos no contienen el tres?
    c) ¿Cuántos no contienen el tres ni el cuatro?
    d) ¿Cuánto suman los números del apartado anterior?

18. ¿Cuántas veces hay que escribir el 5 en una lista con todos los números entre 1 y 100 000?

19. ¿Cuántos números de cinco dígitos, formados con $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, son divisibles por 4?

20. Determina el número de enteros de seis dígitos (que no empiecen por cero) que se pueden formar si:
    a) No se repite ningún dígito.
    b) Se pueden repetir los dígitos.
    c) No se repite ningún dígito y el número resultante es par.
    d) Se pueden repetir los dígitos y el número resultante es par.
    e) No se repite ningún dígito y el número resultante es múltiplo de 5.
    f) Se pueden repetir los dígitos y el número resultante es múltiplo de 5.
    g) No se repite ningún dígito y el número resultante es múltiplo de 4.
    h) Se pueden repetir los dígitos y el número resultante es múltiplo de 4.

21. ¿Cuántas secuencias de cinco letras, formadas con A, B, C, D, pueden formarse sin que aparezca el patrón BAD?

22. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras en la palabra TRABAJAN? ¿De cuántas, si las tres A están juntas?

23. Da un argumento combinatorio para demostrar que si n y k son enteros positivos tales que $n = 3k$, entonces $n!/(3!)^k$ es un entero.

24. Un profesor tiene siete libros distintos sobre programación en una estantería. Tres de los libros son de C y los otros cuatro de PASCAL. Calcula de cuántas maneras puede el profesor ordenar los libros en la estantería si:
    a) No hay restricciones.
    b) Se deben alternar los libros de cada lenguaje.

c) Todos los libros de C deben estar juntos.

d) Todos los libros de C deben estar juntos y los de PASCAL también.

e) Los tres libros de C están juntos con dos libros de PASCAL a cada lado.

25. El alfabeto Hermetiano tiene 6 letras. Una palabra es cualquier secuencia de seis letras, siempre que haya alguna letra repetida. ¿Cuántas palabras hay en el lenguaje Hermetiano?

26. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 9 libros diferentes entre quince personas si a ninguna se le puede dar más de un libro?

    a) $\mathrm{C}(15, 9)$, b) 15^9, c) $\mathrm{C}(15, 9)\, 9!$.

27. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los 10 primeros números naturales de forma que los números pares y los impares estén alternados?

    a) $10!$, b) $2\, 5!\, 5!$, c) $5!$

28. ¿Cuántas secuencias de n dígitos se pueden formar con (1, 2, 3) de forma que haya exactamente 9 unos?

    a) $\mathrm{V}(n, 9)\, \mathrm{VR}(n - 9, 2)$, b) $\mathrm{C}(n, 9)\, \mathrm{VR}(n - 9, 2)$, c) $\mathrm{C}(n, 9)\, \mathrm{CR}(2, n - 9)$

29. ¿Cuántas palabras diferentes de 10 letras pueden formarse con las 5 vocales y 5 consonantes diferentes, elegidas de entre las 21 posibles? ¿Cuál es la probabilidad de que una de estas palabras no tenga dos consonantes consecutivas?

30. ¿Cuál es la probabilidad de que un número de 9 dígitos tenga, al menos, uno repetido?

31. Calcula el número de ordenaciones de las letras *a, b, c, d, e, f* en las que la *a* aparece antes que la *b*.

32. Un estudiante desea programar el estudio de sus exámenes en siete días, estudiando una materia cada día. Si tiene cinco asignaturas, ¿de cuántas formas distintas puede programarse para dedicar, al menos, un día a cada materia?

33. Se consideran reordenaciones de las letras de la palabra PROPOSICION

    a) ¿En cuántas de dichas ordenaciones aparecen cualquiera de las palabras POPO o RIO?

    b) ¿Cuántas tienen al menos 4 consonantes juntas?

    c) ¿Cuántas tienen las tres Os en lugares no adyacentes?

34. ¿En cuántas ordenaciones de la palabra INSTRUCTOR aparecen tres vocales consecutivas? ¿En cuántas aparecen dos vocales consecutivas?

35. Calcula el total de ordenaciones de la palabra CALAHORRA de modo que:

    a) No aparezca ningún par de letras idénticas consecutivas.

    b) Tengan dos y sólo dos As consecutivas y ninguna R consecutiva.

36. Se tienen $2n$ discos rojos, $2n$ discos azules y $2n$ discos blancos. Determina de cuántas maneras distintas podemos dividir el total de discos en dos mitades, es decir en dos grupos de $3n$ discos. Téngase en cuenta que no importa el orden de las dos mitades. Así, por ejemplo, para el caso $n = 1$, las divisiones $\{(RRA), (ABB)\}$ y $\{(ABB), (RRA)\}$ resultan iguales.

37. Dada una colección de $2n$ objetos, n idénticos y los otros n todos distintos, ¿cuántas colecciones diferentes de n objetos pueden hacerse?

38. ¿Cuántos subconjuntos de tres números diferentes entre 1 y 90 se pueden formar de manera que su suma sea un número impar? ¿Y que su suma sea un múltiplo de 3?

39. ¿Cuántas secuencias de 5 ceros y 10 unos se pueden formar sin que haya dos ceros consecutivos?

40. ¿De cuántas maneras se puede invitar a cenar a uno de tres amigos diferentes durante seis noches consecutivas sin que ninguno sea invitado más de tres veces?

41. ¿Cuántos números mayores que 3 000 000 pueden formarse mediante ordenaciones de 1, 2, 2, 4, 6, 6, 6?

42. ¿Cuántas secuencias de 8 dígitos tienen exactamente seis cifras diferentes?

43. ¿Cuántas derivadas parciales diferentes de orden r tiene una función de n variables, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$?

44. ¿De cuántas formas se pueden colocar nueve tuercas en 4 tornillos si el orden de las tuercas no importa? ¿Y si el orden de las tuercas sí importa?

45. Determina el número de soluciones enteras no negativas de las siguientes inecuaciones: $x_1+x_2+x_3 \leq 6$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 15$.

46. Halla el coeficiente de v^3w^2xyz en $(3v + 2w + x + y + z)^8$.

47. Determina cuántas soluciones enteras no negativas hay para el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 37, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

De ellas, ¿cuántas cumplen x_1, x_2, $x_3 > 0$?

48. Dos enteros de n dígitos (se permiten ceros al principio) se consideran equivalentes si uno de ellos es una permutación del otro (por ejemplo, 12 033, 20 133, 30 321, se consideran enteros equivalentes de 5 dígitos).

    a) ¿Cuántos enteros de 5 dígitos no son equivalentes?
    b) Si los dígitos 1, 3, 7 sólo pueden aparecer una vez, ¿cuántos enteros no equivalentes hay de 5 dígitos?

49. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 15 objetos idénticos en cuatro cajas diferentes si el número de objetos en la cuarta caja tiene que ser múltiplo de 3?

50. Si se distribuyen al azar n objetos distintos en n cajas distintas, calcula la probabilidad de que:

    a) Ninguna caja esté vacía.
    b) Exactamente una caja está vacía.

51. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse 8 bolas en 6 cajas, si las dos primeras cajas deben tener como mucho cuatro bolas entre las dos y las bolas son idénticas? ¿Y si las bolas son distintas?

52. Tenemos 20 objetos distintos que queremos repartir en 3 cajas idénticas. ¿De cuántas formas se puede hacer si no se puede quedar ninguna caja vacía? ¿Y si se puede quedar alguna caja vacía?

Anexo: Resumen de las técnicas combinatorias

Variaciones con repetición

El número de *variaciones con repetición* de n elementos tomados de k en k es:

$$VR(n,k) = n^k.$$

Este número es lo mismo que:

- El número de aplicaciones de $\mathbb{N}_k$ en $\mathbb{N}_n$, o en general, el número de aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$ entre un conjunto X con cardinal k y otro conjunto Y con cardinal n.
- El número de palabras de k letras en un alfabeto de n letras.
- El número de selecciones ordenadas de k elementos (admitiendo repeticiones) de un conjunto de n elementos.

Variaciones

El número de *variaciones* de n elementos tomados de k en k es:

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ si } 0 \leq k \leq n.$$

Este número es lo mismo que:

- El número de aplicaciones inyectivas de $\mathbb{N}_k$ en $\mathbb{N}_n$, o en general, el número de aplicaciones inyectivas $f : X \longrightarrow Y$ entre un conjunto X con cardinal k y otro conjunto Y con cardinal n.
- El número de palabras de k letras en un alfabeto de n letras que no tienen ninguna letra repetida.
- El número de selecciones ordenadas de k elementos (sin repeticiones) de un conjunto de n elementos.

Permutaciones

El número de *permutaciones* de un conjunto de n elementos es:

$$P(n) = n!.$$

Este número es lo mismo que:

- El número de aplicaciones biyectivas de $\mathbb{N}_n$ en $\mathbb{N}_n$, o en general, el número de aplicaciones biyectivas $f : X \longrightarrow Y$ entre dos conjuntos X e Y con el mismo cardinal n.
- El número de ordenaciones distintas de un conjunto de n elementos.
- El número variaciones de n elementos tomados de n en n.

Permutaciones con repetición

El número de *permutaciones con repetición* de un conjunto de k elementos $\{a_1, \ldots, a_k\}$ en el que cada elemento a_i se repite α_i veces, con $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$, $\alpha_i \geq 1$, es:

$$PR(n; \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \binom{n}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_k!}.$$

Este número es lo mismo que:

- Dar una lista ordenada de longitud n donde el elemento a_1 se repite α_1 veces, el a_2, α_2 veces y, en general, el a_i, α_i veces ($\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n$ y $\alpha_i \geq 1$).
- Distribuir n objetos diferentes en k cajas, de modo que la caja i-ésima recibe α_i objetos.
- El número de aplicaciones de un conjunto de n elementos en otro conjunto de k elementos tales que envían α_1 elementos a a_1, …, α_k elementos a a_k.

Combinaciones

El número de *combinaciones* de un conjunto de n elementos tomados de k en k es:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Este número es lo mismo que:

- El número de subconjuntos de k elementos que podemos formar a partir de un conjunto de n elementos.
- El número de selecciones no ordenadas de k elementos que se pueden hacer a partir de un conjunto de n elementos.

Combinaciones con repetición

El número de *combinaciones con repetición* de n elementos tomados de k en k es:

$$CR(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Este número es lo mismo que:

- El número de selecciones no ordenadas (con elementos repetidos) de k elementos que se pueden hacer a partir de un conjunto de n elementos.
- El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = k.$$

- Formas de distribuir k objetos idénticos en n cajas etiquetadas.

Capítulo 3

Funciones generadoras

3.1. Introducción

La resolución de problemas combinatorios no es una cuestión sencilla, pues no parecen existir métodos directos de resolución. Cada problema aparenta ser distinto a los demás, a pesar de que se resuelvan utilizando las mismas herramientas. Con el ánimo de introducir métodos más o menos directos, aparecen las *funciones generadoras* que se revelan como una técnica de gran utilidad a la hora de resolver problemas de distribuciones con restricciones. Veamos un par de ejemplos que motivan la introducción de las funciones generadoras.

Ejemplo 3.1.- *Un terrateniente quiere repartir sus doce fincas entre sus tres hijos de manera que el mayor tenga como mínimo 4 fincas, el mediano 3 como mínimo y el pequeño 2 como mínimo. Además, el padre quiere que ninguno de sus hijos tenga más de 6 fincas. ¿De cuántas maneras se puede efectuar el reparto?*

Si denotamos por x_1, x_2 y x_3 el número de fincas que recibe el hijo mayor, el mediano y el pequeño respectivamente, para resolver el problema tenemos que encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12, \text{ con } 4 \leq x_1 \leq 6,\ 3 \leq x_2 \leq 6,\ 2 \leq x_3 \leq 6.$$

El conjunto de soluciones se muestra en la tabla 3.1.

Tabla 3.1: Soluciones del problema de la herencia.

x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
4	3	5	4	4	4	4	5	3
4	6	2	5	3	4	5	4	3
5	5	2	6	3	3	6	4	2

Pensemos ahora en el problema de multiplicar los polinomios

$$(x^4 + x^5 + x^6)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6).$$

¿De cuántas maneras se puede obtener x^{12}? Por ejemplo, de $x^4x^3x^5$ o de $x^4x^4x^4$ o de $x^6x^3x^3$. Observamos que se obtiene x^{12} para cada terna de la tabla anterior. Luego la solución del problema es el coeficiente de x^{12} en la función

$$f(x) = (x^4 + x^5 + x^6)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6).$$

A esta función se le llama función generadora del problema. Sus coeficientes nos dan las soluciones de un conjunto de problemas asociados. Por ejemplo, si se trata de repartir 13 fincas con las mismas restricciones, la solución sería el coeficiente de x^{13} en $f(x)$, es decir, 11 posibles repartos. ■

Ejemplo 3.2.- *Un bodeguero generoso me permite que me lleve 24 botellas de su bodega, en la que tiene vino del año, crianza, reserva y gran reserva. Lo único que me exige es que me lleve al menos 10 botellas de vino del año, un número par de botellas de crianza, entre 3 y 10 botellas de reserva y, como mucho, 6 botellas de gran reserva. ¿De cuántas formas me puedo llevar las botellas?*

El problema es equivalente a encontrar el coeficiente de x^{24} en la función

$$f(x) = (x^{10} + x^{11} + x^{12} + \cdots + x^{24})(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{24})$$
$$\times (x^3 + x^4 + x^5 + \cdots + x^{10})(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6).$$

La solución es, por tanto, 168 posibilidades. ■

La técnica de las funciones generadoras simplifica en buena medida el planteamiento de un problema de distribuciones con restricciones. Aún así, el cálculo de un coeficiente de forma directa puede resultar laborioso. Es por ello que necesitamos profundizar un poco más en las propiedades de las funciones generadoras.

3.2. Definición y propiedades de las funciones generadoras

En esta sección vamos a definir las funciones generadoras con más precisión. Así mismo, analizaremos también sus principales propiedades, que nos permitirán, en ocasiones, dar una expresión más manejable de las mismas.

Definición 3.1.- *Sea $a_0, a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de números reales. Llamamos función generadora de la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ a una función $G(x)$ tal que*

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

La función generadora de la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ debe entenderse como una forma alternativa de representarla. En este sentido, no debemos preocuparnos por la convergencia de la serie.

Ejemplo 3.3.- *Para un $n \in \mathbb{N}$ dado, la función $G(x) = (1 + x)^n$ es la función generadora de la sucesión $a_k = \binom{n}{k}$.*

En efecto, las funciones generadoras ya nos han aparecido con anterioridad y, gracias al Teorema del binomio, podemos escribir

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{k} x^k + \cdots + \binom{n}{n} x^n.$$

De este modo, $G(x) = (1 + x)^n$ es la función generadora de $a_k = \binom{n}{k}$.

Podemos decir que la función $(1 + x)^n$ resume la solución de una familia de problemas, como es el de determinar el número de formas en que pueden seleccionarse k objetos de un total de n. ■

Ejemplo 3.4.- *Otro ejemplo de funciones generadoras lo encontramos en los números de Stirling de primera clase. En este caso la función*

$$G(x) = x^{\overline{n}} = \overbrace{x(x + 1)(x + 2) \ldots (x + n - 1)}^{n \text{ factores}},$$

genera la sucesión $a_k = \left[{n \atop k}\right]$, el total de formas en que una permutación de n elementos puede descomponerse en k ciclos (o el total de formas en que n personas pueden sentarse en k mesas redondas sin que ninguna quede vacía).

Considerando las funciones generadoras como series de potencias formales, uno puede operar con ellas para obtener nuevas funciones generadoras que están relacionadas con las sucesiones a las que representan.

Entre las propiedades más importantes podemos señalar las siguientes.

Adición. Si $G_1(x)$ es la función generadora de $a_0, a_1, \ldots$ y $G_2(x)$ es la función generadora de $b_0, b_1, \ldots$, entonces $\alpha G_1(x) + \beta G_2(x)$ es la función generadora de $\alpha a_0 + \beta b_0, \alpha a_1 + \beta b_1, \ldots$. Basta tener en cuenta que las series se suman como si fueran polinomios.

Desplazamiento. Si $G(x)$ es la función generadora de $a_0, a_1, \ldots$, entonces $x^n G(x)$ es la función generadora de

$$\overbrace{0, \ldots, 0}^{n \text{ ceros}}, a_0, a_1, \ldots.$$

Análogamente,

$$(G(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{n-1} x^{n-1})/x^n$$

es la función generadora de $a_n, a_{n+1}, \ldots$.

Ejemplo 3.5.- *$G(x) = 1/(1-x)$ es la función generadora de la sucesión constante $a_n = 1$.*

Si $G(x)$ es la función generadora de la sucesión constante $1, 1, \ldots$, entonces $xG(x)$ genera a $0, 1, 1, \ldots$, por lo que $(1-x)G(x) = 1$. Esto proporciona la importante fórmula

$$G(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots.$$

Nótese que esto, además, nos indica que una función generadora puede tener inversa, en el sentido de que existe otra función generadora $G(x)^{-1}$ tal que $G(x)G(x)^{-1} = 1$. La condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es que $a_0 \neq 0$. ■

Multiplicación. Si $G_1(x)$ es la función generadora de $a_0, a_1, \ldots$ y $G_2(x)$ es la función generadora de $b_0, b_1, \ldots$, entonces

$$\begin{aligned} G_1(x)G_2(x) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) \\ &= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots \end{aligned}$$

es la función generadora de la sucesión $s_0, s_1, \ldots$, donde

$$s_n = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k b_{n-k}.$$

En términos de series de potencias, a la serie

$$\sum_{k \geq 0} s_k x^k$$

se le llama producto de Cauchy de las series definidas por $G_1(x)$ y $G_2(x)$.

Un caso importante es cuando $\{b_n\}$ es la sucesión constante 1. En esta situación tenemos

$$\frac{1}{1-x} G(x) = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \cdots$$

que es la función generadora de la sucesión de sumas parciales de la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 0}$.

Ejemplo 3.6.- *Determina la función generadora de la sucesión $a_n = n$.*

La función $G(x) = 1/(1-x)$ genera la sucesión constante $a_n = 1$. Por la propiedad de multiplicación, la función $G(x)^2$ genera la sucesión de sumas parciales de a_n, es decir, genera la sucesión $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = n + 1$. Por tanto $G(x)^2$ genera la sucesión $1, 2, 3, \ldots$. Aplicando la propiedad de desplazamiento $xG(x)^2$ genera la sucesión $0, 1, 2, 3, \ldots$, que es la que pide determinar el problema.

En resumen, $F(x) = x/(1-x)^2$ genera la sucesión $a_n = n$. ■

Cambio de variable. Si $G(x)$ es la función generadora de la sucesión $a_0, a_1, \ldots$, entonces $G(cx)$ es la función generadora de la sucesión
$$a_0, ca_1, c^2a_2, \ldots.$$
En particular, la función generadora de la sucesión $1, c, c^2, c^3, \ldots$ es $1/(1-cx)$.

Además de estas propiedades algebraicas las técnicas de cálculo nos proporcionan nuevas operaciones, como la derivación y la integración. Así, si $G(x)$ es la función generadora de la sucesión $a_0, a_1, \ldots$, entonces $xG'(x)$ es la función generadora de $\{na_n\}$. Análogamente
$$\frac{1}{x}\int_0^x G(s)\,ds = a_0 + \frac{1}{2}a_1x + \frac{1}{3}a_2x^2 + \cdots$$
es la función generadora de $\{a_n/(n+1)\}$.

Las funciones generadoras tienen múltiples aplicaciones y el poder determinarlas, para una sucesión dada, resulta de gran utilidad, especialmente si la sucesión está relacionada con la solución general de un cierto problema combinatorio. En cualquier caso, no existen métodos generales para determinar una función generadora, aunque en cierto tipo de problemas es posible dar unas reglas más o menos generales. En este sentido nos será de utilidad el Teorema del binomio generalizado.

Teorema 3.1.- (Teorema del binomio generalizado) *Si definimos*
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},$$
con $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k.$$

Demostración. Basta con desarrollar la función $f(x) = (1+x)^\alpha$ en serie de Taylor en torno a $x = 0$.

En efecto, las derivadas sucesivas de la función f son
$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\ &\vdots \\ f^{k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}. \end{aligned}$$
Puesto que
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{k)}(0)}{k!}x^k + \cdots,$$
resulta finalmente
$$f(x) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \cdots.$$
Es decir, $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$. ∎

Un caso especialmente interesante del Teorema del binomio generalizado es cuando α es un entero negativo. En este caso, podemos encontrar la función generadora de las combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k.

Corolario 3.2.- *Si $\alpha = -n$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces*
$$\binom{-n}{k} = (-1)^k\binom{n+k-1}{k}.$$
Además,
$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} CR(n,k)x^k.$$

Demostración. En efecto, si $\alpha = -n$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}$$
$$= (-1)^k \frac{(n+k-1)\cdots(n+1)n}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Ahora bien, $\binom{n+k-1}{k} = \mathrm{CR}(n,k)$, por lo que $\binom{-n}{k} = (-1)^k\,\mathrm{CR}(n,k)$ y entonces

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{CR}(n,k)x^k. \qquad \blacksquare$$

En realidad, la función $G(x) = \frac{1}{(1-x)^n}$ equivale a multiplicar n veces la serie

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots.$$

Denotemos por e_1 al exponente de x en la primera serie, por e_2 al exponente de x en la segunda serie y así sucesivamente. Obtendremos x^k, en el producto final, cada vez que se cumpla

$$e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n = k. \tag{3.1}$$

Por tanto, el coeficiente de x^k es el total de soluciones enteras no negativas de la ecuación (3.1). Pero, como ya vimos en el tema anterior, esto equivale a $\mathrm{CR}(n,k)$.

Esta observación es muy útil a la hora de resolver problemas de combinaciones con repetición con restricciones. Podemos interpretar cada uno de los e_j como los elementos que se combinan en el problema (en un total de k) y los exponentes de la serie asignada a cada elemento como los posibles valores que pueden tomar estos elementos. Al final, la solución de nuestro problema es el coeficiente de x^k.

Ejemplo 3.7.- *Determina el total de enteros entre* 1 *y* 1 000 000 *tales que la suma de sus cifras sea igual a* 15 *(véase el Ejemplo 17 del Tema 2).*

Podemos ver los enteros entre 1 y 1 000 000 como los números de 6 dígitos que pueden empezar por 0. En este sentido uno de tales números puede escribirse como

$$c_1c_2c_3c_4c_5c_6.$$

Sus cifras sumarán 15 cuando se cumpla

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 15,$$

siendo cada uno de los c_j un número comprendido entre 0 y 9. Es decir, los posibles valores que pueden tomar cada uno de los c_j son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9.

Por tanto, asignamos a cada uno de los 6 elementos que se combina la serie

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9.$$

El resultado del problema será el coeficiente de x^{15} en $G(x)^6$.

Ahora bien, $G(x)$ puede escribirse como

$$G(x) = \frac{1-x^{10}}{1-x},$$

por lo que

$$G(x)^6 = \frac{(1-x^{10})^6}{(1-x)^6} = (1-x^{10})^6 \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{CR}(6,k)x^k.$$

Aplicando el Teorema del binomio para desarrollar $(1-x^{10})^6$, encontramos que el coeficiente de x^{15} es

$$\mathrm{CR}(6,15) - \binom{6}{1}\mathrm{CR}(6,5) = \binom{20}{5} - \binom{6}{1}\binom{10}{5} = 13\,992,$$

que es el resultado pedido. $\blacksquare$

En el ejemplo anterior teníamos una restricción importante para los dígitos $c_j : 0 \leq c_j \leq 9,\ j = 1, 2, \ldots, 6$. Por lo tanto resultaba fundamental el delimitar tanto el primer término como el último de la función generadora. En otros problemas, donde no hay limitación superior para las incógnitas, se puede seguir un desarrollo más sencillo.

Ejemplo 3.8.- *¿De cuántas formas se pueden repartir 25 monedas de euro entre 4 niños?*

Se trata de encontrar las soluciones de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25, \text{ con } x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Este problema se resuelve encontrando el coeficiente de x^{25} en

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{25})^4$$

o, equivalentemente, en

$$g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{25} + x^{26} + \cdots)^4.$$

Obsérvese que $f(x)$ es un polinomio y $g(x)$ es la representación formal de una serie de potencias. Obsérvese también que, para el cálculo del coeficiente de x^{25}, no se utilizan los términos de x^k con $k \geq 26$, de ahí la equivalencia entre ambos tratamientos.

Sin embargo, en ocasiones, es más sencillo trabajar con series de potencias que con polinomios. En nuestro caso, tenemos que

$$\begin{aligned} g(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{25} + x^{26} + \cdots)^4 \\ &= \frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{j \geq 0} CR(4, j) x^j, \end{aligned}$$

por lo que nuestra solución es $CR(4, 25) = \binom{28}{25} = 3\,276$ formas. ■

Ejemplo 3.9.- *Se lanza una moneda al aire 25 veces consecutivas, saliendo un total de 8 cruces. Calcula la probabilidad de que no hayan salido 6 o más caras consecutivas.*

Llamemos c_1 al total de caras que han salido antes de la primera cruz, c_2 al total de caras entre la primera y segunda cruz y así sucesivamente hasta llegar a c_9, que representa el total de caras después de la octava cruz.

Como se han realizado 25 lanzamientos y el total de cruces es 8, tiene que cumplirse

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 + c_9 = 17, \tag{3.2}$$

pues en total habrán salido 17 caras.

La probabilidad la calcularemos como siempre por el cociente entre casos favorables y casos posibles.

Los casos posibles son el total de soluciones de la ecuación (3.2), es decir $\mathrm{CR}(9, 17) = \binom{25}{8}$. Nótese que el resultado es el mismo que el de determinar las ocho posiciones que han ocupado las cruces en los 25 lanzamientos.

Los casos favorables son las soluciones de (3.2) con la restricción de que cada uno de los c_j no puede ser mayor que 5. Asignando a cada c_j la serie

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5,$$

los casos favorables serán el coeficiente de x^{17} en $G(x)^9$.

Como $G(x)$ puede escribirse como $G(x) = (1 - x^6)/(1 - x)$, resulta

$$G(x)^9 = \frac{(1-x^6)^9}{(1-x)^9} = (1 - x^6)^9 \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{CR}(9, k)\, x^k.$$

Desarrollando $(1-x^6)^9$ mediante la fórmula del binomio obtenemos el siguiente coeficiente para x^{17}

$$\mathrm{CR}(9,17)-\binom{9}{1}\mathrm{CR}(9,11)+\binom{9}{2}\mathrm{CR}(9,5).$$

Finalmente, la probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} p &= \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} \\ &= \frac{\mathrm{CR}(9,17)-\binom{9}{1}\mathrm{CR}(9,11)+\binom{9}{2}\mathrm{CR}(9,5)}{\mathrm{CR}(9,17)} \\ &= 0{,}413905. \end{aligned}$$

La resolución de este problema sin la ayuda de las funciones generadoras es bastante más complicada. Para determinar los casos posibles procedemos como en el ejemplo 17 del tema 2. Al total de soluciones de (3.2) le descontamos las soluciones que incumplen el enunciado. Es decir, descontaremos aquellas soluciones en que haya algún c_j mayor o igual que 6. Supongamos que es $c_9 \geq 6$, entonces se tiene que cumplir

$$c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6+c_7+c_8 \leq 11.$$

Como ya vimos en el ejemplo 17 del tema 2, el total de soluciones de esta desigualdad es $\mathrm{CR}(9,11)$. Puesto que el elemento que puede ser mayor que 5 es cualquiera de los 9, habrá que descontar $9\,\mathrm{CR}(9,11)$ al total de soluciones de (3.2). Notemos que este es el segundo término del coeficiente de x^{17} que hemos obtenido mediante las funciones generadoras.

Sin embargo, este no es el resultado definitivo, ya que puede haber hasta dos elementos que pueden ser mayores que 5 al mismo tiempo. En este caso habremos descontado dos veces esa posibilidad, una por cada uno de los elementos que es mayor que 5. Por tanto, debemos sumar todo lo que hemos descontado de más. Y es aquí donde hay que proceder con cuidado. A primera vista puede parecer que si hay dos elementos mayores que 5, los otros siete tienen que sumar 5 o menos y entonces habría que sumar $\binom{9}{2}\,\mathrm{CR}(8,5)$. Pero este factor no es el mismo que hemos obtenido mediante funciones generadoras. El porqué de esto es que no hemos tenido en cuenta el orden, pues si son c_8 y c_9 los que suman 13, por ejemplo, no hemos contemplado cuál de los dos es el que vale 7 y cuál el que vale 6. Esto nos conduce a la tentación de multiplicar por 2 el resultado obtenido ($\binom{9}{2}\,\mathrm{CR}(8,5)$). No obstante, esto no arregla el problema, ya que

$$2\binom{9}{2}\,\mathrm{CR}(8,5)=1\,584>\mathrm{CR}(9,5)=1\,287.$$

¿Dónde está ahora el fallo? La respuesta es que cuando ambos elementos valen lo mismo, por ejemplo 6 y 6, el orden no importa. Por eso hay que proceder con mucho cuidado, analizando cada caso concreto.

Suma 12: 6 + 6, 1 caso $\longrightarrow$ $\mathrm{CR}(7,5)$

Suma 13: $\left\{\begin{array}{l} 6+7, \\ 7+6, \end{array}\right.$ 2 casos $\longrightarrow 2\,\mathrm{CR}(7,5)$

Suma 14: $\left\{\begin{array}{l} 6+8, \\ 7+7, \\ 8+6, \end{array}\right.$ 3 casos $\longrightarrow 3\,\mathrm{CR}(7,5)$

Suma 15: $\left\{\begin{array}{l} 6+9, \\ 7+8, \\ 8+7, \\ 9+6, \end{array}\right.$ 4 casos $\longrightarrow 4\,\mathrm{CR}(7,5)$

Suma 16: $\left\{\begin{array}{l} 6+10, \\ 7+9, \\ 8+8, \\ 9+7, \\ 10+6, \end{array}\right.$ 5 casos $\longrightarrow 5\,\mathrm{CR}(7,5)$

$$\text{Suma 17: } \begin{cases} 6+11, \\ 7+10, \\ 8+9, \\ 9+8, \\ 10+7, \\ 11+6, \end{cases} \quad 6 \text{ casos} \longrightarrow 6\,\mathrm{CR}(7,5)$$

La suma de todos estos valores puede comprobarse que es equivalente a $\mathrm{CR}(9,5)$, por lo que ahora sí que obtendríamos el factor que aparece con las funciones generadoras. Por tanto, el resultado sería el mismo. ■

Es importante destacar que un ataque del problema mediante combinatoria tradicional puede llevarnos a una solución equivocada. Por ello hay que ser muy cuidadoso a la hora de proceder en su resolución. Es por eso que las funciones generadoras resultan de gran utilidad, pues nos ahorran la mayor parte del razonamiento combinatorio, evitando errores innecesarios que, de otra forma, pueden producirse.

3.3. Funciones generadoras exponenciales

Las funciones generadoras que hemos usado para resolver los problemas correspondientes a los ejemplos anteriores se denominan, habitualmente, *funciones generadoras ordinarias* y se usan para resolver problemas relacionados con combinaciones con repetición con o sin restricciones. Este tipo de problemas es equivalente a la distribución de objetos idénticos en cajas diferentes. Cuando los objetos son diferentes el problema es esencialmente el mismo, pero se necesita modificar convenientemente el tipo de funciones generadoras que se usan. Se introducen entonces las que se conocen como *funciones generadoras exponenciales*. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.10.- *Determina el total de palabras de cuatro letras formadas con a, b y c, de forma que la letra a aparezca al menos dos veces.*

Resolvámoslo inicialmente considerando casos. De este modo, las posibles combinaciones de letras que pueden formar la palabra son $\{a,a,a,a\}$, $\{a,a,a,b\}$, $\{a,a,a,c\}$, $\{a,a,b,b\}$, $\{a,a,b,c\}$ y $\{a,a,c,c\}$. El total de palabras diferentes a los que da lugar cada conjunto de letras es un problema de permutaciones con repetición. Así tenemos que la solución es

$$\frac{4!}{4!0!0!}+\frac{4!}{3!1!0!}+\frac{4!}{3!0!1!}+\frac{4!}{2!2!0!}+\frac{4!}{2!1!1!}+\frac{4!}{2!0!2!}. \tag{3.3}$$

Nótese que el problema es muy parecido a los considerados anteriormente. En efecto, si denotamos por e_1 el total de as que aparecen en la palabra, por e_2 el total de bs y por e_3 el total de cs, se tiene que cumplir

$$e_1+e_2+e_3=4, \qquad e_1 \geq 2, \quad e_2, e_3 \geq 0.$$

La diferencia es que ahora cada solución entera de la ecuación no contribuye en uno al total de soluciones, sino en un número igual a

$$\frac{4!}{e_1!e_2!e_3!}=\frac{(e_1+e_2+e_3)!}{e_1!e_2!e_3!}.$$

En este sentido, podemos asignar a cada elemento que se combina (en este caso las letras a, b y c) una serie de potencias en x donde el exponente representa el número de veces que dicho elemento interviene en la combinación y donde el coeficiente de x^k es $1/k!$. No es difícil ver que entonces la solución del problema será el coeficiente de x^4 (en este caso) multiplicado por 4! o, equivalentemente, el coeficiente de $x^4/4!$.

Para el problema que nos ocupa, las series que debemos asignar a cada elemento son

$$\begin{aligned} a &\longrightarrow \frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots, \\ b &\longrightarrow 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots, \\ c &\longrightarrow 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots. \end{aligned}$$

Si multiplicamos las series y buscamos el coeficiente de x^4 y lo multiplicamos por 4! obtenemos (3.3).

Conviene hacer notar que las series asignadas son series exponenciales, ya que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots.$$

Por tanto, el producto de las tres series correspondientes a a, b y c las podemos expresar como

$$(e^x - x - 1)e^x e^x = e^{3x} - xe^{2x} - e^{2x}.$$

Si buscamos ahora el coeficiente de x^4 en la expresión anterior y lo multiplicamos por 4! resulta

$$3^4 - 4 \cdot 2^3 - 2^4.$$

Esto es, el total de secuencias diferentes que se pueden formar con a, b y c menos el total de secuencias que tienen una sóla a, menos el total de secuencias que no tienen ninguna a. ■

Definición 3.2.- *Una función generadora exponencial para la sucesión de números $\{a_n\}_{n\geq 0}$ es una función $G(x)$ que admite el siguiente desarrollo en serie:*

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + \cdots + a_n\frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

Para analizar la relación entre las funciones generadoras exponenciales y los problemas de distribución en los que importa el orden, recordemos lo que nos dice el Teorema del binomio:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$
$$= C(n,0) + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + C(n,n)x^n, \quad n = 0,1,2,3\ldots$$

Tengamos en cuenta ahora que

$$C(n,j) = \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{V(n,j)}{j!},$$

donde $V(n,j)$ es el número de variaciones de n elementos tomados de j en j. En consecuencia, para $n = 0,1,2,3\ldots$,

$$(1+x)^n = V(n,0) + V(n,1)x + V(n,2)\frac{x^2}{2!} + V(n,3)\frac{x^3}{3!} + \cdots + V(n,n)\frac{x^n}{n!}.$$

Por lo tanto, si nos fijamos en el coeficiente de $x^j/j!$ en el desarrollo de $(1+x)^n$, obtenemos $V(n,j)$.

Observemos que el desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial e^x es:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}.$$

Por lo tanto e^x es la función generadora exponencial de la sucesión $\{1,1,1,\ldots\}$ y la función generadora ordinaria de la sucesión $\{1, 1/1!, 1/2!, 1/3!, \ldots\}$.

Ejemplo 3.11.- *Encuentra la función generadora exponencial que permite determinar el número de formas de distribuir n personas en tres habitaciones diferentes de manera que haya al menos una persona en cada habitación.*

Calcula el número de formas de distribuir 25 personas en tres habitaciones diferentes de manera que haya al menos una persona en cada habitación.

Se trata de la función generadora

$$G(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^3 = (e^x - 1)^3.$$

Para encontrar la solución en el caso de 25 personas, debemos calcular el coeficiente de $x^{25}/25!$ en el desarrollo anterior. Para ello,

$$(e^x-1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1 = \sum_{j=0}^{\infty} 3^j \frac{x^j}{j!} - 3\sum_{j=0}^{\infty} 2^j \frac{x^j}{j!} + 3\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} - 1,$$

por lo que el coeficiente de $x^{25}/25!$ es $3^{25} - 3\cdot 2^{25} + 3$. Nótese que este resultado es también $3!\left\{{25 \atop 3}\right\}$, como se deduce del Teorema 2.12. ■

Ejemplo 3.12.- *Encuentra la función generadora exponencial que permite determinar el número de formas de distribuir n personas en cuatro habitaciones diferentes de manera que en cada habitación haya un número par de personas.*

Resuelve el problema para el caso de 18 *personas. ¿Qué ocurrirá para un número impar de personas?*

Se trata de la función generadora

$$G(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^4 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^4.$$

Para encontrar la solución en el caso de 18 personas, debemos calcular el coeficiente de $x^{18}/18!$ en el desarrollo anterior. Para ello,

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}(e^{4x} + 4e^{2x} + 6 + 4e^{-2x} + e^{-4x})$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(\sum_{j=0}^{\infty} 4^j \frac{x^j}{j!} + 4\sum_{j=0}^{\infty} 2^j \frac{x^j}{j!} + 4\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j 2^j \frac{x^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j 4^j \frac{x^j}{j!} + 6\right).$$

En consecuencia, el coeficiente de $x^{18}/18!$ es

$$2(4^{18} + 4\cdot 2^{18})/2^4 = 2(4^{16} + 2^{16}).$$

Para el caso de un número impar de personas, se puede probar, bien con un poco de lógica, o bien analizando los coeficientes del desarrollo anterior convenientemente modificado, que no hay ninguna distribución posible. ■

3.4. Problemas resueltos

1. Dos amigos se quieren repartir 8 botellas de vino blanco, 9 botellas de clarete y 11 botellas de tinto. ¿De cuantas formas se puede hacer el reparto si cada uno tiene que recibir 14 botellas y al menos un par de botellas de cada tipo?

   Solución. Consiste en fijar la distribución de uno de los amigos, respetando la cantidad mínima que debe recibir el otro. Así, x_1, x_2, x_3 son las botellas de cada tipo que recibe uno de los amigos, $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ con $2 \le x_1 \le 6$ (para dejarle un mínimo de dos botellas al otro), $2 \le x_2 \le 7$, $2 \le x_3 \le 9$.
   La solución nos la da el coeficiente de x^{14} en

$$(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)$$
$$\times(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9)$$
$$= x^6(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$$
$$\times(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)$$

es decir, el coeficiente de x^8 en

$$(1-x^5)(1-x^6)(1-x^8)/(1-x)^3 = (1-x^5-x^6-x^8+x^{11}+\cdots)\sum_{k\geq 0} CR(3,k)$$

$$= CR(3,8) - CR(3,3) - CR(3,2) - CR(3,0). \qquad \blacksquare$$

2. Determina el total de formas en que pueden distribuirse 20 objetos distintos en 6 cajas distintas de manera que haya dos cajas que contengan cada una a lo sumo 2 objetos y que, de las otras cuatro, una contenga un número par de objetos y otra un número impar.

Solución. Sea a_j el total de elementos que recibe la caja j. Como hemos distribuido 20 objetos, es evidente que

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 20.$$

Asignemos a cada caja una serie donde los exponentes de las potencias de x representen el número de objetos que recibe la caja. Como hay restricciones, supongamos que las dos primeras cajas son aquéllas que contienen a lo sumo dos objetos. De esta manera, las series correspondientes a las dos primeras cajas son

$$1 + x + \frac{x^2}{2!}.$$

Como vemos la serie es finita, pues las cajas no pueden contener más de dos objetos (potencia de x^2). Además, cada potencia de x va dividida por el factorial del exponente. Esto es porque no sólo interesa saber cuántos objetos hay en cada caja sino también cuáles, ya que éstos son distintos.

Suponiendo, ahora, que la tercera caja es la que contiene un número par de objetos, a ésta le corresponderá la serie

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Si es la cuarta caja la que contiene un número impar, a ésta le corresponde la serie

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Finalmente, a las otras dos cajas les corresponde la serie

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x.$$

Si multiplicamos todas las series, la solución del problema será el coeficiente de x^{20} multiplicado por 20!. Ahora bien el producto de todas las series nos da

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)^2 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) e^x e^x$$
$$= \left(1 + 2x + 2x^2 + x^3 + \frac{x^4}{4}\right)\left(\frac{e^{4x} - 1}{4}\right).$$

Teniendo en cuenta que

$$e^{4x} = 1 + (4x) + \frac{(4x)^2}{2!} + \frac{(4x)^3}{3!} + \cdots,$$

encontramos el siguiente coeficiente para x^{20}

$$\frac{1}{4}\left(\frac{4^{20}}{20!} + 2\frac{4^{19}}{19!} + 2\frac{4^{18}}{18!} + \frac{4^{17}}{17!} + \frac{1}{4}\frac{4^{16}}{16!}\right).$$

La solución final será este coeficiente multiplicado por 20! y por la manera de elegir las cajas que contienen a lo sumo dos objetos, la que tiene un número par y la que tiene un número impar. Pero esto puede hacerse de

$$\binom{6}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{1}$$

formas. Es decir, se eligen primero las dos que contienen a lo sumo dos objetos de entre las seis cajas, luego, de las cuatro restantes, se elige la que contiene un número par y finalmente se elige la contiene un número impar entre las tres restantes. Así, la solución final es

$$20!\binom{6}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\frac{1}{4}\left(\frac{4^{20}}{20!}+2\frac{4^{19}}{19!}+2\frac{4^{18}}{18!}+\frac{4^{17}}{17!}+\frac{1}{4}\frac{4^{16}}{16!}\right),$$

es decir, 13 800 889 563 217 920 distribuciones posibles. ■

3. Determina el total de maneras en que pueden distribuirse 12 objetos diferentes en 6 cajas distintas, si una de las cajas debe contener un número impar de objetos y, al menos, otras dos no deben estar vacías. ¿Cómo cambia el problema si añadimos, además, la condición de que una de las cajas contiene a lo sumo 2 objetos?

Solución. En primer lugar hay que plantear una ecuación que refleje la distribución que se está realizando. Así, en este problema, si llamamos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6 al número de objetos que se ponen en las cajas 1, 2, 3, 4, 5 y 6, respectivamente, se debe cumplir

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=12,$$

pues en total hemos distribuido 12 objetos.

Ahora asignamos a cada variable x_j una serie de potencias en x de forma que los exponentes de x representen el número de objetos que es posible poner en la caja j.

Supongamos que es la primera caja la que contiene un número impar de objetos. Puesto que los objetos a distribuir son distintos, importa saber no sólo cuántos hay en cada caja, sino cuáles hay en cada una, por lo que en este caso, la serie que le corresponde a x_1 será una serie exponencial

$$\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots \tag{3.4}$$

Análogamente, si las cajas 2 y 3 son las que no pueden estar vacías, a éstas les corresponde la serie

$$\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \tag{3.5}$$

donde están todos los exponentes menos el 0 (caja vacía).

Para el resto de cajas, como no hay ninguna restricción, la serie correspondiente es

$$\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots. \tag{3.6}$$

A continuación debemos multiplicar las 6 series y el resultado del problema será el coeficiente de x^{12} (12 es el total de objetos distribuidos), multiplicado por 12!.

Ahora bien, la serie (3.4), correspondiente a la primera caja, se puede escribir como

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

la serie (3.5) como e^x-1 y la serie (3.6) como e^x. Por lo tanto el producto de las 6 series da como resultado

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}\left(e^x-1\right)^2\left(e^x\right)^3=\frac{e^{6x}-e^{5x}+e^{3x}-e^{2x}}{2}.$$

Teniendo en cuenta el desarrollo en serie de la exponencial, el coeficiente de x^{12} multiplicado por 12! resulta ser

$$\frac{1}{2}(6^{12}-5^{12}+3^{12}-2^{12}).$$

Este no es el resultado final del problema, ya que aquí hemos supuesto que la caja primera era la que tenía un número impar de objetos y que las cajas 2 y 3 eran las que no podían estar vacías. Sin embargo, la caja con un número impar de objetos puede ser cualquiera de las seis y, una vez que ésta está fijada, de las cinco restantes, cualesquiera dos pueden ser las que no deben estar vacías. Por lo tanto el resultado obtenido antes hay que multiplicarlo por $6C(5,2)$

Para responder a la segunda pregunta del problema no debemos hacer nada nuevo, pues esa condición va implícita en las anteriores. Como no se especifica cuál de las cajas es la que debe cumplir la condición, hemos de suponer que puede ser cualquiera. Supongamos que la caja que tiene un número impar de objetos tiene sólo uno. Entonces, esta caja cumple con la condición. Si tuviera 3, como hay otras 2 que no deben estar vacías, si alguna de ellas tuviera 1 ó 2 objetos, ya estaría. Si no fuera así, entonces tendríamos tres cajas con al menos 9 objetos, con tres para repartir en otras tres cajas, lo cual significa que al menos una no supera los dos objetos. ■

3.5. Problemas propuestos

1. Construye una función generadora para a_n, el número de soluciones enteras de las ecuaciones:

   a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = n,\ 0 \leq x_j \leq 4,\ j = 1, \ldots, 5.$
   b) $x_1 + x_2 + x_3 = n,\ 0 < x_j < 4,\ j = 1, 2, 3.$
   c) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n,\ 2 \leq x_j \leq 8,\ j = 1, \ldots, 4,$ x_1 par, x_2 impar.
   d) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n,\ 0 \leq x_j,\ j = 1, \ldots, 4.$
   e) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n,\ 0 < x_j,\ j = 1, \ldots, 4,$ x_2, x_4 impares, $x_4 \geq 3$.

2. A partir de las operaciones básicas entre funciones generadoras, determina las funciones generadoras de las sucesiones de término general:

$$a_n = 12; \quad b_n = n; \quad c_n = 2n + 1; \quad d_n = n^2; \quad e_n = n(n-1)(n-2)(n-3).$$

3. Construye una función generadora para a_n, el número de formas de seleccionar de una pila n objetos, si la pila está compuesta por

   a) Tres bolas rojas, cuatro negras y cuatro blancas.
   b) Cinco bolas rojas, tres blancas y ocho negras y en cada selección hay al menos una bola de cada color.
   c) Un número ilimitado de bolas rojas, blancas y negras.
   d) Bolas de siete colores distintos de forma que en la selección haya un número impar de bolas del primer y segundo color.

4. Determina la función generadora del número de selecciones posibles de n bolas elegidas de entre una colección de 8 colores, si las bolas están en paquetes de 5.

5. Usa funciones generadoras para determinar el número de formas de elegir 5 números entre 1 y n de forma que no haya dos consecutivos. Calcula la solución para el caso $n = 20$.

6. Mediante funciones generadoras, calcula el número de formas en que se pueden recolectar 24 euros de 4 niños y 6 adultos si cada uno de ellos dona al menos 1 euro, pero los niños no donan más de 4 euros y los adultos no más de 7 euros.

7. Se distribuyen, al azar, 32 objetos idénticos en 12 cajas numeradas del 1 al 12. Si ninguna tiene más de 4 objetos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos estén vacías? ¿Cuál es la probabilidad de que la quinta y la sexta caja estén vacías?

8. Encuentra la función generadora para obtener el total de formas en que pueden distribuirse 20 personas en 6 habitaciones si tiene que haber entre 2 y 4 en cada habitación en los siguientes casos:

    a) Las habitaciones son indistinguibles.
    b) Las habitaciones son diferentes.

9. Determina el número de secuencias de longitud 25, formadas con los números 0, 1 y 2 de forma que:

    a) Haya un número par de ceros.
    b) Haya un número par de ceros y un número par de unos.
    c) Ningún número aparece exactamente dos veces.

10. Se distribuyen al azar 10 objetos idénticos en 15 cajas diferentes. Calcula la probabilidad de que las dos primeras tengan al menos un objeto cada una.

11. ¿Cuántas palabras de 10 letras pueden construirse con 22 consonantes y 5 vocales si las vocales no pueden usarse más de una vez?

12. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse n objetos distintos en k cajas distintas si ninguna caja puede estar vacía?

13. Determina el total de maneras en que pueden distribuirse 10 objetos diferentes en 5 cajas distintas, si una de las cajas debe contener un número par de objetos y, al menos, otras dos no deben estar vacías. ¿Cómo cambia el problema si añadimos, además, la condición de que una de las cajas contiene a lo sumo 2 objetos?

14. Determina el total de secuencias de longitud n formadas con 1, 2, 3 y 4 de manera que el total de doses y treses sea par.

15. Calcula de cuántas formas pueden distribuirse 40 objetos diferentes en 4 cajas distintas si:

    a) Debe haber un número par de objetos entre las dos primeras (el 0 es un número par).
    b) Debe haber un número impar de objetos entre las tres primeras.

    Resuelve el apartado b) en el caso de que los objetos sean iguales.

16. ¿Cuántos números de 10 cifras formados con los dígitos 1, 2, 3 y 4 son tales que los dígitos 2 y 3 no pueden usarse exactamente dos veces?

17. Determina el total de formas en que pueden distribuirse 20 objetos diferentes en 7 cajas distintas de forma que ninguna esté vacía y las dos primeras contengan 4 objetos entre las dos.

18. Se distribuyen al azar 10 objetos idénticos en 15 cajas diferentes. Calcula la probabilidad de que:

    a) Las dos primeras tengan al menos un objeto cada una.
    b) Haya al menos dos objetos en las dos primeras.

    ¿Cambiarían las probabilidades si los objetos fueran distintos?

19. ¿Cuántos números de 5 cifras, pudiendo empezar por 0, son tales que los dígitos 2 y 3 aparecen como mucho una vez? ¿Y al menos una vez?

20. Un barco lleva 48 banderas, 12 de cada uno de los colores rojo, blanco, azul y negro. Se colocan doce de estas banderas en un mástil para comunicar una señal a otros barcos.

    a) ¿Cuántas de estas señales utilizan un número par de banderas azules y un número impar de banderas negras?

    b) ¿Cuántas de estas señales tienen al menos tres banderas blancas o no tienen ninguna?

Capítulo 4

Sucesiones recurrentes lineales

4.1. Introducción

Al igual que las funciones generadoras, las relaciones de recurrencia son una técnica que sirve para resolver algunos problemas combinatorios de forma sistemática. En ocasiones, la dificultad para resolver un problema depende de las dimensiones del mismo. Por ejemplo, encontrar los subconjuntos de dos elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de tres elementos es un problema sencillo. Sin embargo, si aumentamos las dimensiones del problema, un recuento «por la cuenta de la vieja» resulta enseguida inviable. Se necesita entonces abordar el problema con otro tipo de conocimientos y técnicas. En el caso del ejemplo anterior, es conocido (véase la sección 2.8) que la solucón al problema la da el número combinatorio $\binom{n}{k}$. En esa misma sección se obtuvo la relación

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{4.1}$$

Podemos interpretar esta relación entre números combinatorios como una manera para resolver un problema en unas dimensiones (n y k) en términos del mismo problema en dimensiones menores ($n-1$ y $k-1$). La fórmula (4.1) es un ejemplo de lo que se conoce como una *ecuación de recurrencia*. El interés de las fórmulas de recurrencia es que proporcionan un algoritmo para resolver problemas de dimensiones cada vez mayores. Lo único que hace falta es conocer los puntos de partida (que suelen ser problemas sencillos de resolver) y determinar la propia fórmula de recurrencia, que suele ser lo más complicado.

Las ecuaciones recurrentes tienen otras aplicaciones, entre las que podríamos destacar la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Es por ello que existe una teoría desarrollada que permite su resolución, al menos en el caso de que se trate de una ecuación en recurrencias lineales. En este capítulo presentamos dicha teoría y la aplicamos al caso de resolver problemas de recuento.

4.2. Sucesiones recurrentes

Una *sucesión recurrente* es aquélla en la que los términos de la misma vienen dados en función de los anteriores. En los capítulos precedentes ya nos hemos encontrado con este tipo de sucesiones (coeficientes binomiales, números de Stirling de primera y segunda clase, etc.). Sin embargo, las sucesiones que nosotros vamos a tratar son las que denominaremos *sucesiones recurrentes lineales*, en las que los términos de la sucesión se obtienen a partir de combinaciones lineales de los términos anteriores.

Antes de dar una definición precisa de lo que son este tipo de sucesiones, veamos dos ejemplos clásicos. Comenzaremos con un problema recreativo, denominado *las torres de Hanoi*, que debe su origen al matemático francés Edward Lucas (año 1883).

Ejemplo 4.1. (Torres de Hanoi) *Inicialmete tenemos una torre de 8 discos, apilados uno sobre otro en orden decreciente, insertados en una de tres agujas. El objetivo es pasar toda la torre de discos de una aguja a otra, moviendo sólo un disco cada vez y de forma que nunca puede colocarse un disco mayor sobre otro menor*[1]*. ¿Cuántos movimientos son necesarios para resolver el problema?*

[1]Lucas planteó el problema como si fuera una leyenda sobre la torre de Brahma, con 64 discos. Al principio de los tiempos Dios colocó 64 discos de oro en la primera aguja y ordenó a un grupo de monjes que transfIrieran todos los discos a la tercera

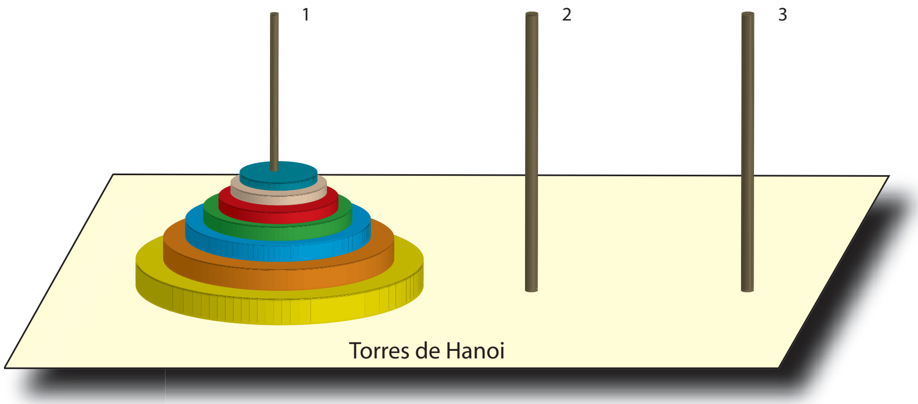


Figura 4.1: El juego de las torres de Hanoi con siete discos.

Resolveremos el problema en el caso general, suponiendo que el número de discos es arbitrario, digamos n. Luego obtendremos la solución particular para el caso $n = 8$.

Para empezar, trataremos de encontrar la solución del problema para casos pequeños, es decir, para pocos discos, y luego generalizaremos el resultado. Para ello es necesario introducir cierta notación, como es llamar T_n al mínimo número de movimientos necesarios para pasar una torre de n discos de una aguja a otra. Es obvio que $T_1 = 1$ y $T_2 = 3$. Pero, ¿qué pasa cuando hay más discos? Si el número de discos es $n = 3$ es fácil darse cuenta que la forma óptima de proceder es pasar los dos primeros discos a la aguja intermedia, luego pasar el tercer disco a la tercer aguja y finalmente los dos discos de la aguja intermedia a la tercera. Esto nos da una estrategia *recursiva*. En el fondo, si sabemos cómo proceder con dos discos, también sabemos proceder con tres.

Con n discos la estrategia es similar. Basta con transferir $n-1$ discos a la aguja intermedia, pasar el último disco a la tercera aguja y, finalmente, los $n-1$ discos de la aguja intermedia a la tercera. Por lo tanto, en términos de T_n, el número de movimientos que se necesitan son:

- T_{n-1} para transferir los $n-1$ primeros discos a la aguja intermedia.
- Un movimiento para pasar el último disco a la tercera aguja.
- T_{n-1} para transferir los $n-1$ discos de la aguja intermedia a la tercera.

En resumen, el total de movimientos para transferir una torre de n discos es

$$T_n = 2T_{n-1} + 1, \qquad T_1 = 1. \tag{4.2}$$

Ésta es una sucesión recurente, puesto que el término n-ésimo de la sucesión se obtiene a partir del $(n-1)$-ésimo. Para nuestro problema hay que determinar el valor de T_8, lo que da un resultado de 255 movimientos.

Por más que los términos de la sucesión vengan dados por (4.2), no parece que sea muy útil a la hora de calcular el valor de un término concreto de la misma para valores grandes de n. Por ejemplo, ¿cuál es el mínimo número de movimientos para $n = 64$, como en el problema inicial de Edward Lucas? Para dar la respuesta debríamos calcular todos los valores de la sucesión hasta $n = 63$. La pregunta entonces es: ¿Hay alguna manera de encontrar una fórmula que nos diga cuánto vale la solución para un n cualquiera y que sea sólo función de n?

Podemos ir viendo qué se obtiene para los primeros términos de la sucesión T_n:

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
1	3	7	15	31	63	127	255

aguja, siguiendo las reglas mencionadas. Cuando hubieren acabado su tarea, el mundo llegaría a su fin.

No es difícil darse cuenta de que cada término es una potencia de 2 menos 1, por lo que podemos suponer que

$$T_n = 2^n - 1. \tag{4.3}$$

Sin embargo, esto no es una prueba y, una demostración rigurosa, precisa del principio de inducción. De hecho, las sucesiones recurrentes son un campo muy apropiado para encontrar problemas donde poner a prueba el principio de inducción matemática. En este caso es fácil ver que la base de la inducción se cumple, pues para $n = 1$ se tiene

$$T_1 = 2^1 - 1 = 1.$$

Supongamos ahora que la fórmula (4.3) es cierta para $n < k$ y probemos que entonces también es cierta para $n = k$. Como

$$T_k = 2T_{k-1} + 1,$$

podemos usar la hipótesis de que la fórmula es cierta para $k - 1$ y entonces

$$T_k = 2(2^{k-1} - 1) + 1 = 2^k - 1,$$

por lo que la fórmula también es cierta para $n = k$. De esta forma, por inducción, hemos probado que (4.3) se cumple para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, con la expresión que nos proporciona (4.3), ya podemos calcular T_{64}, o cualquier otro valor de la sucesión, y obtenemos que

$$T_{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Suponiendo que los monjes de Brahma hagan un cambio cada segundo, el mundo se acabaría aproximadamente 600.000 millones de años después del primer movimiento. ■

Ejemplo 4.2.- *¿Cuántos trozos de pizza pueden obtenerse haciendo n cortes rectos con un cuchillo? Dicho de otra manera ¿Cuál es el número máximo de regiones R_n en que queda dividido el plano por n rectas*[2]*?*

Como en el ejemplo anterior podemos empezar considerando los primeros casos, es decir, cuando hay un número pequeño de rectas.

Si no hay ninguna recta, $n = 0$, sólo hay una región y $R_0 = 1$. Si hay una recta habrá dos regiones y $R_1 = 2$. Para dos rectas el número de regiones es $R_2 = 4$. Parece ser que el número de regiones se duplica cada vez y podemos suponer que $R_n = 2^n$. Sin embargo, esto no es cierto, como se observa al considerar tres rectas, donde el máximo número de regiones que se pueden conseguir es 7.

No es difícil darse cuenta de cómo encontrar una recurrencia. De hecho, una recta, la n-ésima por ejemplo, incrementará el número de regiones en k si y sólo si atraviesa k regiones existentes. Pero para que eso suceda la nueva recta debe cortar en $k - 1$ puntos a las rectas existentes. Puesto que dos rectas sólo se pueden cortar en un punto, podemos incrementar el número de regiones de manera máxima si la nueva recta corta a cada una de las ya existentes. En este caso el número de regiones se incrementará en n, al tratarse de la recta n-ésima. Por tanto

$$R_n = R_{n-1} + n.$$

Como en el ejemplo anterior se trata de una recurrencia lineal. Además, puesto que $R_0 = 1$, podemos encontrar una fórmula explícita para R_n usando la recurrencia una y otra vez. En efecto,

$$\begin{aligned} R_n &= R_{n-1} + n \\ &= R_{n-2} + (n-1) + n \\ &= R_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &= \cdots \\ &= R_0 + 1 + 2 + \cdots + n = 1 + 1 + 2 + \cdots + n. \end{aligned}$$

Y por el ejemplo 4 del capítulo 1,

$$R_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 0. \qquad ■$$

[2]Este problema fue resuelto por vez primera en 1826 por el matemático suizo Jacob Steiner.

En estos dos ejemplos hemos sido capaces de encontrar una fórmula explícita para los términos de la recurrencia. Pero no siempre resulta tan sencillo, como veremos a continuación en un problema clásico que apareció en el *Liber abaci* de Leonardo de Pisa (Fibonacci) en el siglo XII.

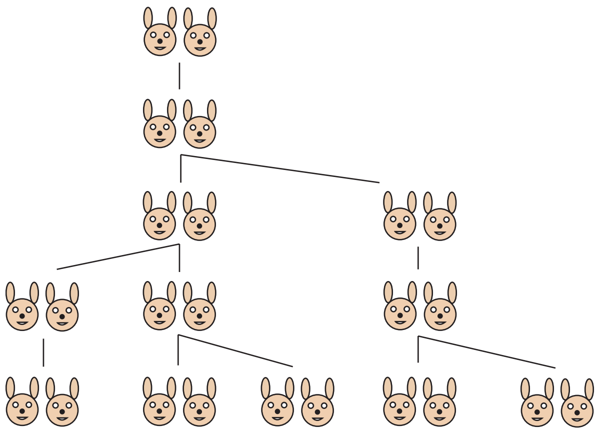


Figura 4.2: El problema de los conejos de Fibonacci.

Ejemplo 4.3.- *Un hombre encerró a una pareja de conejos en un lugar rodeado por un muro por todas partes. ¿Cuántos pares de conejos pueden producirse a partir del par original durante un año si consideramos que cada pareja engendra al mes un nuevo par de conejos que se convierten en productivos al segundo mes de vida?*

Como antes, empecemos por el principio, viendo lo que pasa en los primeros meses, tal y como se refleja en la figura 4.2. Al segundo mes tendremos la pareja inicial que ya se ha vuelto productiva. Al tercer mes habrá dos pares de conejos, uno el productivo y otro el engendrado por la primera pareja. Al cuarto mes habrá tres pares; la primera pareja habrá engendrado un nuevo par, mientras que la segunda se ha vuelto ya productiva. Así, si llamamos F_n al número de pares de conejos en el mes n-ésimo podemos escribir

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3.$$

¿Es $F_n = n - 1$? La respuesta es no, y para verlo consideremos el siguiente término de la sucesiń, F_5. Como al cuarto mes hay dos parejas productivas, en el quinto mes tendremos las tres parejas que ya había más dos nuevas parejas, las engendradas por las productivas. Por lo tanto $F_5 = 5$. A partir de aquí, no es difícil dar con una relación para los términos de la sucesión. En realidad, en el n-ésimo mes tendremos todos los pares de conejos que había en el mes anterior más todos los pares que han nacido. Pero los pares que han nacido son igual al número de parejas productivas y éstas son igual al número de parejas que había en el mes $n - 2$ (las que ya eran productivas lo siguen siendo y las que no lo eran se han vuelto productivas al haber transcurrido un mes). Por lo tanto

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Sin embargo, en este caso no es sencillo encontrar una fórmula explícita para los términos de la sucesión. La diferencia fundamental con las sucesiones de los dos ejemplos anteriores radica en que F_n viene dado en función de los dos términos anteriores de la sucesión y no sólo del anterior, como ocurría antes. De hecho se puede ver que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \tag{4.4}$$

pero esto no parece obvio por inspección de los términos de la sucesión. Ni siquiera parece obvio que la fórmula (4.4) dé lugar a números enteros para los diferentes valores de n.

Puede obtenerse la fórmula (4.4) mediante una sencilla aplicación del Álgebra Lineal. Para ello basta expresar la recurrencia en forma matricial. De hecho, podemos escribir

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Si llamamos A a la matriz que aparece en (4.5), resulta

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix} = A^n \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}.$$

Si sabemos calcular las potencias de una matriz, el problema está resuelto. Ahora bien, esto es relativamente sencillo si conocemos los valores y vectores propios de la matriz A. En efecto, si λ_1 y λ_2 son los valores propios de A, y la matriz es diagonalizable, existe una matriz P, que tiene por columnas a los vectores propios, tal que

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot P,$$

y además,

$$A^n = P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \cdot P^{-1}.$$

En nuestro caso, los valores propios de A son $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y las matrices P y P^{-1} resultan ser

$$P = \begin{bmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ -1 & -\lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $F_1 = F_2 = 1$, entonces

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ -1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Haciendo las operaciones, obtenemos

$$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda_1^n (1 + \lambda_1) - \lambda_2^n (1 + \lambda_2) \right),$$

y, puesto que $1 + \lambda_1 = \lambda_1^2$ y $1 + \lambda_2 = \lambda_2^2$, se obtiene el resultado dado en (4.4). ■

Con el objeto de encontrar un procedimiento para calcular el término general de una sucesión (a_n) que viene dada a través de una recurrencia lineal, empezaremos por dar una definición más o menos precisa de lo que entenderemos por sucesión recurrente.

Definición 4.1.- *Dada una sucesión (a_n), si existe un número natural k y unos números reales c_1, c_2, …, c_k tales que a partir de un cierto m se tiene*

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n + f(n), \tag{4.6}$$

con $n \geq m \geq 1$, diremos que (a_n) es una sucesión recurrente lineal de orden k. *A la relación (4.6) la denominaremos* ecuación recurrente lineal de orden k.

Supongamos que (4.6) es válida para $n = 1$ (lo que significa $m = 1$ en la definición), entonces

$$a_{k+1} = c_1 a_k + c_2 a_{k-1} + \cdots + c_k a_1 + f(1),$$

por lo que para determinar a_{k+1} es necesario conocer a_1, a_2, …, a_k. Es decir, para que una recurrencia lineal de orden k esté completamente determinada, además de la ecuación (4.6) que la define, es preciso conocer los k primeros términos de la misma.

Definición 4.2.- *Las recurrencias lineales se clasifican en* homogéneas *y* no homogéneas*, según sea el término independiente $f(n)$. Así, si en la ecuación (4.6) $f(n) = 0$, es decir, $f(n)$ es la función constante igual a cero, diremos que la recurrencia es* homogénea*. En caso contrario, diremos que la recurrencia es* no homogénea*.*

En muchas ocasiones una recurrencia no homogénea puede transformarse en otra que sí lo es. Por ejemplo, la recurrencia dada para el problema de las Torres de Hanoi (ejemplo 4.1), $T_n = 2T_{n-1} + 1$, es una recurencia de orden uno no homogénea. Sin embargo, escribamos la recurrencia para $n + 1$ y restemos las expresiones correspondientes a T_{n+1} y T_n

$$T_{n+1} = 2T_n + 1, \qquad T_n = 2T_{n-1} + 1$$
$$T_{n+1} - T_n = 2T_n - 2T_{n-1}$$
$$T_{n+1} = 3T_n - 2T_{n-1}.$$

Observamos que los términos de T_n satisfacen una recurrencia lineal homogénea de orden dos.

Análogamente, la recurrencia para el caso de las regiones en que queda dividido el plano por n rectas (ejemplo 4.2) puede transformarse en otra homogénea por un procedimiento similar. En este caso en la recurrencia no homogénea $R_n = R_{n-1} + n$, consideramos los términos R_n y R_{n+1}. Restándolos se obtiene

$$R_{n+1} - R_n = R_n - R_{n-1} + 1,$$

es decir

$$R_{n+1} = 2R_n - R_{n-1} + 1.$$

Considerando ahora R_{n+2} y volviendo a restar se obtiene finalmente

$$R_{n+2} = 3R_{n+1} - 3R_n + R_{n-1},$$

que es una recurrencia lineal homogénea de orden 3.

Como se ve, el precio que hay que pagar para convertir una recurrencia no homogénea en otra homogénea es el aumento en el orden de la misma. Sin embargo, para la resolución de las recurrencias homogéneas existe un método general que consideraremos a continuación.

4.3. Resolución de recurrencias lineales homogéneas

Empecemos resolviendo una recurrencia lineal de primer orden homogénea. Esto es, una recurrencia dada por la ecuación

$$a_{n+1} = qa_n, \qquad n \geq 1. \tag{4.7}$$

Observemos que cualquier progresión geométrica de razón q cumple esta ecuación. De hecho, aplicando sucesivamente la relación (4.7) se obtiene

$$a_{n+1} = a_1 q^n, \qquad n \geq 0. \tag{4.8}$$

En este caso, la sucesión queda determinada de manera única por el primer término de la misma y por el coeficiente q. Una fórmula explícita para los términos de la sucesión está dada por (4.8).

Consideremos ahora el caso de una recurrencia lineal homogénea de orden k dada por la relación

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n, \qquad n \geq 1. \tag{4.9}$$

Esta ecuación es satisfecha por infinitas sucesiones, al igual que la ecuación (4.7) era satisfecha por cualquier progresión geométrica de razón q. En este caso la sucesión quedará determinada de manera única una vez que se conozcan los k primeros términos de la misma.

Por ejemplo, no es complicado comprobar que las sucesiones de la forma $a_n = A + B2^n$, con A y B dos números reales cualesquiera, satisfacen la recurrencia $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, $n \geq 1$. Ahora bien, si fijamos los dos primeros términos de la sucesión (a_n), ésta queda determinada de forma única. En efecto, si $a_0 = a_1 = 1$ entonces $a_n = 1$ para todo $n \geq 0$. Sin embargo, si $a_0 = 1/2$ y $a_1 = 1$ entonces $a_n = 2^{n-1}$ para todo $n \geq 0$. En general, dados los dos primeros términos a_0 y a_1, los coeficientes A y B son la única solución del sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} A & + & B & = & a_0 \\ A & + & 2B & = & a_1. \end{array} \right.$$

Con el fin de encontrar una fórmula para dar el término general de una recurrencia lineal, veamos primero algunas propiedades de las soluciones de la ecuación (4.9).

Teorema 4.1 *Si* (x_n) *e* (y_n) *son dos sucesiones que satisfacen la ecuación (4.9), entonces la sucesión* (z_n)*, tal que* $z_n = Ax_n + By_n$*, con* $A, B \in \mathbb{R}$*, también satisface (4.9).*

Demostración. Por ser (x_n) e (y_n) sucesiones que verifican (4.9) se tiene

$$\begin{cases} x_{n+k} = c_1 x_{n+k-1} + c_2 x_{n+k-2} + \cdots + c_k x_n, \\ y_{n+k} = c_1 y_{n+k-1} + c_2 y_{n+k-2} + \cdots + c_k y_n. \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por A, la segunda por B y sumando, resulta

$$A x_{n+k} + B y_{n+k} = c_1(A x_{n+k-1} + B y_{n+k-1}) + c_2(A x_{n+k-2} + B y_{n+k-2})$$
$$+ \cdots + c_k(A x_n + B y_n).$$

Es decir, la sucesión (z_n) dada por $z_n = Ax_n + By_n$, también satisface la ecuación (4.9). ■

Este resultado nos dice que cualquier combinación lineal de sucesiones que satisfacen (4.9) también satisface (4.9). A partir de aquí, no es difícil probar que cualquier sucesión que satisface (4.9) se puede poner como combinación lineal de una base de k sucesiones independientes que también satisfacen (4.9). En efecto, sean (x_n^m), con $m = 1, \ldots, k$, las k sucesiones independientes. Entonces la sucesión (a_n) cuyos k primeros términos son a_1, a_2, ..., a_k se podrá obtener como combinación lineal de (x_n^m) siempre que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A_1 x_1^1 + A_2 x_1^2 + \cdots + A_k x_1^k = a_1, \\ A_1 x_2^1 + A_2 x_2^2 + \cdots + A_k x_2^k = a_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ A_1 x_k^1 + A_2 x_k^2 + \cdots + A_k x_k^k = a_k, \end{cases}$$

tenga solución única. En este caso tiene que ser

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k^1 & x_k^2 & \cdots & x_k^k \end{vmatrix} \neq 0,$$

que es la condición de independencia de las sucesiones (x_n^m).

Por lo tanto, el problema de encontrar la sucesión que satisface (4.9) y cuyos k primeros términos son a_1, a_2, ..., a_k pasa por encontrar k sucesiones independientes que cumplan (4.9).

A la vista de que una recurrencia de orden uno es satisfecha por progresiones geométricas, podemos buscar si existen progresiones geométricas

$$a_n = \lambda^n, \tag{4.10}$$

que satisfacen (4.9). En este caso se tiene que cumplir

$$\lambda^{n+k} = c_1 \, \lambda^{n+k-1} + c_2 \, \lambda^{n+k-2} + \cdots + c_k \, \lambda^n.$$

Dividiendo por λ^n, obtenemos una ecuación polinómica de orden k:

$$\lambda^k - c_1 \lambda^{k-1} - c_2 \lambda^{k-2} - \cdots - c_k = 0. \tag{4.11}$$

Definición 4.3.- *La ecuación polinómica anterior (4.11) recibe el nombre de* ecuación característica *asociada a la ecuación recurrente homogénea (4.9).*

Por lo tanto, para que la progresión geométrica (4.10) sea solución de (4.9), λ tiene que ser solución de la ecuación característica (4.11). De este modo, por cada raíz de (4.11) obtendremos una solución de la recurrencia de la forma (4.10). Además, no es difícil ver que dos raíces distintas dan lugar a soluciones independientes. En consecuencia se nos pueden presentar las siguientes situaciones:

1. La ecuación característica (4.11) tiene raíces reales y distintas.

2. La ecuación característica (4.11) tiene raíces reales múltiples.

3. La ecuación característica (4.11) tiene raíces complejas distintas.

4. La ecuación característica (4.11) tiene raíces complejas múltiples.

A continuación, explicamos cómo obtener la solución general de una recurrencia lineal homogénea (4.9) en cada una de estas situaciones.

4.3.1. Caso de raíces reales distintas

Si la ecuación característica (4.11) tiene k raíces reales distintas, entonces tenemos las k sucesiones independientes que necesitamos para encontrar la solución del problema. En este caso la solución general de la recurrencia es de la forma

$$a_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n + \cdots + \alpha_k\lambda_k^n,$$

donde λ_1, λ_2, ..., λ_k son las k soluciones diferentes de la ecuación característica.

Ejemplo 4.4.- *Encuentra una expresión para el término general de la sucesión de Fibonacci (ejemplo 4.3):* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 1$, $F_1 = F_2 = 1$.

La ecuación característica es, en este caso,

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Es decir, la solución de la recurrencia es de la forma

$$F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Los coeficientes A y B los determinamos a partir de los dos primeros términos de la recurrencia, $F_1 = F_2 = 1$. Así, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{Para } n = 1: &\quad A\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1. \\ \text{Para } n = 2: &\quad A\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + B\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1. \end{aligned}$$

Operando, las ecuaciones anteriores pueden escribirse como

$$\begin{aligned} (A+B) + \sqrt{5}(A-B) &= 2, \\ 3(A+B) + \sqrt{5}(A-B) &= 2. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que $A+B = 0$ y $A-B = 2/\sqrt{5}$. Por lo que finalmente $A = 1/\sqrt{5}$, $B = -1/\sqrt{5}$, y la solución para la sucesión de Fibonacci es

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Esta expresión se conoce como fórmula de Binet[3]. ∎

[3] Aunque la fórmula recibe el nombre de este matemático francés del siglo XIX, parece ser que Leonard Euler (1707-1754) y Abraham de Moivre (1667-1754) ya la conocían.

4.3.2. Caso de raíces múltiples

Está claro que si todas las raíces de la ecuación característica son reales y distintas es posible encontrar un conjunto de k sucesiones independientes que nos permiten dar con la solución de la recurrencia (4.9). Sin embargo, si alguna de las raíces tiene multiplicidad mayor que uno, el total de sucesiones de la forma (4.10) será menor que k y necesitaremos encontrar otras sucesiones que nos completen la base para generar la solución general.

Supongamos, en primer lugar, que λ_1 es una raíz de multiplicidad 2, es decir $(\lambda - \lambda_1)^2$ es un factor del polinomio

$$\lambda^k - c_1\lambda^{k-1} - c_2\lambda^{k-2} - \cdots - c_k.$$

En este caso, λ_1 es además raíz de la derivada, por lo que se cumple

$$k\lambda_1^{k-1} - c_1(k-1)\lambda_1^{k-2} - c_2(k-2)\lambda_1^{k-3} - \cdots - c_{k-1} - c_k(k-k) = 0.$$

Multiplicando por λ_1 resulta

$$k\lambda_1^{k} - c_1(k-1)\lambda_1^{k-1} - c_2(k-2)\lambda_1^{k-2} - \cdots - c_{k-1}\lambda_1 - c_k(k-k) = 0,$$

que podemos escribir como

$$k\lambda_1^k - \sum_{n=1}^{k} (k-n)\, c_k\, \lambda_1^{k-n},$$

lo que nos dice que $n\lambda_1^n$ también es solución de la recurrencia.

A esta conclusión también se puede llegar haciendo uso del Teorema 4.1. En efecto, si λ_1 y λ_2 son dos raíces distintas de la ecuación característica, las sucesiones (λ_1^n) y (λ_2^n) son soluciones de (4.9), pero también cualquier combinación lineal de ellas, en particular

$$\lambda_1 \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Si hacemos ahora que λ_2 se acerque a λ_1, tomando límites tenemos que

$$n\lambda_1^n$$

es solución, pero ahora λ_1 es una raíz de multiplicidad 2 de la ecuación característica.

En general, se puede demostrar que si λ_1 (o cualquier otra raíz de (4.11)) tiene multiplicidad m, entonces son solución de la recurrencia (4.9) las sucesiones de término general

$$\lambda_1^n, \quad n\lambda_1^n, \quad n^2\lambda_1^n, \quad \ldots, \quad n^{m-1}\lambda_1^n.$$

De este modo es posible encontrar el conjunto de k sucesiones independientes que dan lugar a la solución general de (4.9).

Ejemplo 4.5.- *Encuentra el término general de la recurrencia* $R_{n+3} = 3R_{n+2} - 3R_{n+1} + R_n$*,* $n \geq 0$*, tal que* $R_0 = 1$*,* $R_1 = 2$*,* $R_2 = 4$*.*

Esta recurrencia es la que satisfacen los términos de la sucesión del Ejemplo 4.2, una vez transformada en homogénea.

La ecuación característica es, en este caso,

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0,$$

que tiene una sóla raíz triple, $\lambda = 1$. Por lo tanto son soluciones de la recurrencia

$$1^n, \quad n\,1^n, \quad n^2\,1^n,$$

es decir (1), (n) y (n^2). Por tanto

$$R_n = A + Bn + Cn^2,$$

y para que los tres primeros términos de la sucesión sean los dados tiene que cumplirse

$$\begin{aligned} &\text{Para } n=0: && A = R_0 = 1,\\ &\text{Para } n=1: && A+B+C = R_1 = 2,\\ &\text{Para } n=2: && A+2B+4C = R_2 = 4. \end{aligned}$$

De aquí resulta $A = 1$, $B = C = 1/2$ y, finalmente,

$$R_n = 1 + \frac{n+n^2}{2} = 1 + \frac{n(n+1)}{2},$$

que es la solución que ya habíamos encontrado. ■

4.3.3. Caso de raíces complejas distintas

Si la ecuación característica (4.11) tiene raíces complejas conjugadas se puede proceder igual que si fueran reales, con la única particularidad de que ahora los coeficientes que finalmente determinan la recurrencia pueden ser también números complejos. No obstante, dado que las sucesiones que vamos a tratar son de números reales, es preferible evitar la aparición de números complejos en la expresión explícita de los términos de la sucesión. Para ello, supongamos que $\alpha \pm i\beta$ son dos raíces complejas conjugadas de la ecuación característica. Si r y θ son, respectivamente, el módulo y el argumento (véase la figura 4.3) de un número complejo $\alpha + i\beta$, entonces

$$\alpha + i\beta = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \quad \alpha - i\beta = r(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta).$$

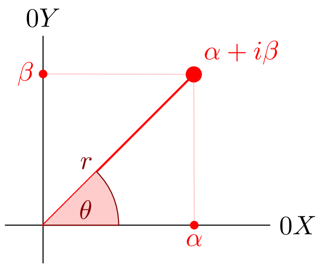


Figura 4.3: Módulo r y argumento θ de un número complejo $\alpha + i\beta$: $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\theta = \operatorname{arc\,tg}(\beta/\alpha)$.

Según hemos visto, las sucesiones $(\alpha \pm i\beta)^n$ son soluciones de (4.9), pero por la fórmula de de Moivre se tiene que

$$(\alpha \pm i\beta)^n = r^n(\cos n\theta \pm i \operatorname{sen} n\theta)$$

son soluciones. Aplicando ahora el Teorema 4.1, permitiendo combinaciones lineales complejas, son soluciones de (4.9) las sucesiones

$$(r^n \cos n\theta), \qquad (r^n \operatorname{sen} n\theta).$$

Ahora bien, estas dos sucesiones son de términos reales y nos valen para formar la base de sucesiones necesarias para obtener la solución general.

Ejemplo 4.6.- *Encuentra una fórmula para la sucesión de las cifras decimales de la fracción* 100/27.

Tenemos que $100/27 = 3{,}703703703703703\ldots$, por lo que las cifras decimales de la misma forman la sucesión

$$d_1 = 7, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = 3, \quad d_4 = 7, \ldots$$

y claramente se satisface la recurrencia

$$d_{n+3} = d_n.$$

La ecuación característica correspondiente a esta recurrencia es, por lo tanto,

$$\lambda^3 - 1 = 0,$$

cuyas raíces son:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Puesta en forma trigonométrica, λ_2 se escribe como

$$\lambda_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$$

y según lo visto, $(\cos\frac{2n\pi}{3})$ y $(\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3})$ son parte de la base de sucesiones necesarias para construir la solución. De este modo

$$d_n = A + B\cos\frac{2n\pi}{3} + C\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}.$$

Imponiendo que $d_1 = 7$, $d_2 = 0$ y $d_3 = 3$ resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} &A - \tfrac{1}{2}B + \tfrac{\sqrt{3}}{2}C = 7,\\ &A - \tfrac{1}{2}B - \tfrac{\sqrt{3}}{2}C = 0,\\ &A + B = 3. \end{aligned}$$

La solución de este sistema es $A = 10/3$, $B = -1/3$ y $C = 7\sqrt{3}/3$. Por lo tanto, la expresión de la recurrencia (d_n) es:

$$d_n = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}. \qquad \blacksquare$$

4.3.4. Caso de raíces complejas múltiples

Si $\lambda = \alpha + i\beta$ es una raíz de multiplicidad m de la ecuación característica, entonces las siguientes sucesiones son soluciones de la recurrencia (4.9):

$$\lambda^n,\ n\lambda^n,\ n^2\lambda^n, \ldots,\ n^{m-1}\lambda^n.$$

Nótese que de igual modo se obtendría una familia de soluciones para la raíz conjugada $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$:

$$\bar{\lambda}^n,\ n\bar{\lambda}^n,\ n^2\bar{\lambda}^n, \ldots,\ n^{m-1}\bar{\lambda}^n.$$

Al igual que ocurría en el caso anterior, los coeficientes que determinan la recurrencia podrían ser números complejos. Si se quiere evitar la aparición de números complejos en la expresión explícita de los términos de la sucesión, se deberían combinar dos soluciones complejas y así, junto con la fórmula de de Moivre, obtener soluciones reales.

Ejemplo 4.7.- *Encuentra la solución de la ecuación en recurrencias*

$$a_{n+4} + 2a_{n+2} + a_n = 0.$$

La ecuación característica asociada a esta recurrencia es

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2.$$

Sus raíces son $\lambda = i$ y $\bar{\lambda} = -i$, ambas con multiplicidad dos. Como $\lambda^n = \cos(n\pi/2) + i\operatorname{sen}(n\pi/2)$ y $\bar{\lambda}^n = \cos(n\pi/2) - i\operatorname{sen}(n\pi/2)$, a partir de las soluciones complejas

$$\lambda^n, n\lambda^n, \bar{\lambda}^n, n\bar{\lambda}^n$$

podemos obtener las siguientes soluciones reales:

$$\cos(n\pi/2),\ \operatorname{sen}(n\pi/2),\ n\cos(n\pi/2),\ n\operatorname{sen}(n\pi/2).$$

Por lo tanto, la solución general del problema es

$$a_n = (A + Bn)\cos(n\pi/2) + (C + Dn)\operatorname{sen}(n\pi/2). \qquad \blacksquare$$

4.4. Resolución de recurrencias lineales no homogéneas

Consideremos ahora el caso de una recurrencia lineal no homogénea dada por la ecuación (4.6)

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n + f(n),$$

donde $f(n)$ es una función conocida de n, distinta de la función nula, $f(n) = 0$.

Puede verse que la solución general de la ecuación anterior depende de k constantes arbitrarias y su estructura es de la forma

$$a_n = a_n^h + a_n^p,$$

siendo a_n^h la solución general de la recurrencia lineal homogénea a la que da lugar la ecuación anterior (haciendo $f(n) = 0$) y a_n^p una solución particular de la misma. Puesto que la resolución de las recurrencias homogéneas ya se ha discutido en el apartado anterior, el problema se reduce a encontrar una solución particular.

Vamos a presentar un método para encontrar una solución particular en el caso en que $f(n)$ sea de la forma

$$\sum_{j=i}^{m} p_j(n) r_j^n,$$

con $p_j(n)$ polinomios en n y $r_j \in \mathbb{R}$. El método se denomina de *coeficientes indeterminados* y consiste en buscar una solución de la forma

$$\sum_{j=i}^{m} q_j(n) r_j^n,$$

donde, en general, los polinomios p_j y q_j son del mismo grado y los coeficientes de los q_j deben ser determinados. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $f(n)$ se compone de un sólo sumando, es decir

$$f(n) = p(n) r^n,$$

donde $p(n)$ es un polinomio de grado conocido. Distinguimos dos situaciones, dependiendo de que r sea solución de la ecuación característica de la recurrencia homogénea o no.

1. Si r no es solución de la ecuación característica de la recurrencia homogénea, tomamos como solución particular una de la forma
$$a_n^p = q(n) r^n,$$
siendo $q(n)$ un polinomio del mismo grado que $p(n)$.

2. Si, por el contrario, r es raíz de la ecuación característica de multiplicidad m, entonces
$$a_n^p = n^m q(n) r^n,$$
siendo $q(n)$ y $p(n)$ polinomios del mismo grado.

Ejemplo 4.8.- *Resuelve la recurrencia correspondiente al problema de las* Torres de Hanoi *(Ejemplo 4.1).*

La ecuación de esta recurrencia, definida en (4.2), viene dada por $T_n = 2T_{n-1} + 1$, $n \geq 2$, junto con la condición $T_1 = 1$. La solución general de esta recurrencia se compone de la suma de dos términos, uno correspondiente a una solución particular de la misma, y otro correspondiente a la solución general de la ecuación homogénea asociada $T_n = 2T_{n-1}$.

Es fácil comprobar que la solución general de la ecuación homogénea es

$$T_n^h = A\,2^n.$$

Por otra parte, por el método de coeficientes indeterminados, la solución particular deberá ser un polinomio de grado 0, es decir

$$T_n^p = B,$$

donde B es una constante a determinar para que se satisfaga (4.2). En este caso, deberá cumplirse

$$B = 2B + 1,$$

por lo que $B = -1$. De este modo, la solución general de la recurrencia anterior, (4.2), es

$$T_n = T_n^h + T_n^p = A\,2^n - 1.$$

Imponiendo ahora que $T_1 = 1$ resulta $A = 1$ y finalmente

$$T_n = 2^n - 1. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.9.- *Resuelve la recurrencia correspondiente al problema de encontrar el máximo número de regiones en que queda dividido el plano por n rectas (Ejemplo 4.2).*

Como se vio, los términos de la recurrencia satisfacen la ecuación

$$R_n = R_{n-1} + n, \quad n \geq 1, \tag{4.12}$$

junto con la condición $R_0 = 1$.

En este caso, la solución general de la ecuación homogénea correspondiente a (4.12) es

$$R_n^h = A.$$

Por otra parte, la solución particular deberá ser

$$R_n^p = n(B + Cn),$$

ya que $f(n) = n\,1^n$ y 1 es una raíz de multiplicidad uno de la ecuación característica. Teniendo en cuenta que

$$R_{n-1}^p = (n-1)(B + C(n-1))$$

y que R_n^p debe satisfacer (4.12), resulta

$$n(B + Cn) = (n-1)(B + C(n-1)) + n,$$

es decir

$$n(2C - 1) + B - C = 0.$$

Por tanto $B = C = \frac{1}{2}$ y

$$R_n^p = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Finalmente tenemos que la solución general de (4.12) es

$$R_n = R_n^h + R_n^p = A + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Imponiendo que $R_0 = 1$, resulta $A = 1$ y

$$R_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 0. \qquad \blacksquare$$

Es importante hacer notar que el procedimiento de resolución es completamente análogo al que se sigue en las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, algo que no es de extrañar, ya que las recurrencias lineales no son más que su contrapartida discreta. De ahí que la terminología sea la misma, habiendo una ecuación característica para encontrar la base de soluciones de la ecuación homogénea y un método de coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular.

4.5. Ecuación característica generalizada

Una recurrencia lineal no homogénea puede resolverse, también, asociando a la misma una ecuación característica que denominaremos generalizada. Esto puede hacerse siempre que el término no homogéneo sea de la forma

$$\sum_{j=1}^{m} p_j(n) r_j^n,$$

es decir, de la forma estudiada previamente.

Definición 4.4.-*Dada la recurrencia lineal no homogénea*

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n + f(n),$$

donde $f(n) = \sum_{j=1}^{m} p_j(n) r_j^n$ *y* $p_j(n)$ *es un polinomio en* n *de grado* g_j*, decimos que la* ecuación característica generalizada de la recurrencia *es*

$$(\lambda^k - c_1 \lambda^{k-1} - \cdots - c_k) \prod_{j=1}^{m} (\lambda - r_j)^{g_j+1} = 0.$$

Es importante hacer notar que esta ecuación se obtiene a partir de la ecuación característica de la recurrencia lineal homogénea multiplicando por factores de la forma $(\lambda - r_j)$. De esta forma podemos considerar la ecuación característica generalizada como la correspondiente a una recurrencia lineal homogénea, sólo que ahora el grado se ha incrementado de k a $k + \sum_{j=1}^{m}(g_j + 1)$. De hecho, se puede probar que esta ecuación corresponde a la de la recurrencia lineal homogénea que resulta al eliminar $f(n)$ mediante manipulaciones convenientes, como ya se hizo para el caso de los Ejemplos 4.1 y 4.2.

Sean λ_1, λ_2, …, λ_s las raíces de la ecuación característica generalizada con multiplicidades α_1, α_2, …, α_s respectivamente. Entonces la solución de la recurrencia se expresa de la forma

$$a_n = \sum_{j=1}^{s} q_j(n) \lambda_j^n,$$

donde $q_j(n)$ es un polinomio en n de grado $\alpha_j - 1$. Los coeficientes de estos polinomios se determinan una vez se conocen los $k + \sum_{j=1}^{m}(g_j + 1)$ primeros términos de la recurrencia.

Nótese que, como la recurrencia original es de orden k, basta con conocer los k primeros términos de la misma. Los términos extra que se necesitan, debido a la ecuación característica generalizada, pueden obtenerse a partir de la propia fórmula de recurrencia.

Ejemplo 4.10.- *Resuelve la recurrencia correspondiente al problema de las torres de Hanoi (ejemplo 4.1).*

Se trata de la recurrencia $T_n = 2T_{n-1} + 1$, ya definida en (4.2), y a la que le corresponde la ecuación característica generalizada

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1).$$

El factor $(\lambda - 2)$ corresponde a la parte homogénea de la ecuación recurrente, mientras que el otro factor proviene de la parte no homogénea, que es de la forma

$$p(n) 1^n,$$

siendo, en este caso, $p(n)$ un polinomio de grado cero.

Así, la solución se escribe como

$$T_n = A\,2^n + B\,1^n = A\,2^n + B.$$

Teniendo en cuenta que $T_1 = 1$ y $T_2 = 3$, las constantes A y B, se obtienen del sistema de ecuaciones

$$T_1 = 2A + B = 1, \qquad T_2 = 4A + B = 3,$$

cuya solución nos da $A = 1$, $B = -1$. Es decir

$$T_n = 2^n - 1,$$

que es la solución que ya hemos obtenido por otros procedimientos. ■

4.6. Funciones generadoras y recurrencias lineales

Las funciones generadoras pueden usarse también para encontrar una fórmula explícita que nos dé el término general de una recurrencia lineal. Así, si (a_n) son los términos de la recurrencia, buscamos la función generadora

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

La expresión de $F(x)$ podrá determinarse gracias a la relación de recurrencia, lo que dará lugar a una fórmula para el cálculo de los términos a_n de la sucesión.

Veamos esto con dos ejemplos correspondientes a la sucesión de Fibonacci (Ejemplo 4.3) y al problema de las Torres de Hanoi (Ejemplo 4.1).

Ejemplo 4.11.- *Encuentra la función generadora para la sucesión de Fibonacci (Ejemplo 4.3) y da el término general de la misma.*

La relación de recurrencia que verifica la sucesión de Fibonacci es

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3, \qquad F_1 = F_2 = 1.$$

Si $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$ es la función generadora de la sucesión, tendremos que

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = F_1 x + F_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n,$$

donde hemos aplicado la relación de recurrencia para $n \geq 3$.

Renombrando los índices en el sumatorio, dividiéndolo en dos y teniendo en cuenta que $F_1 = F_2 = 1$, resulta

$$F(x) = x + x^2 + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + x \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n.$$

Por tanto tenemos la siguiente ecuación en $F(x)$

$$F(x) = x + x^2 + x^2 F(x) + x(F(x) - x),$$

de donde resulta

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Descomponiendo $F(x)$ en fracciones simples se obtiene

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} x} - \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} x} \right],$$

por lo que resulta fácil obtener F_n mediante la suma de dos series geométricas. Así, se tiene

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

que es la expresión que ya habíamos obtenido anteriormente. ∎

En el ejemplo anterior se ha resuelto una recurrencia lineal homogénea, pero el método también es aplicable para recurrencias no homogéneas.

Ejemplo 4.12.- *Determina la función generdora de la recurrencia asociada al problema de las torres de Hanoi (Ejemplo 4.1) y encuentra una expresión para los términos de la misma.*

La recurrencia del problema de las torres de Hanoi viene dada por

$$T_n = 2T_{n-1} + 1,\ n \geq 2, \qquad T_1 = 1.$$

Si $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n$ es la función generadora de la sucesión T_n entonces, aplicando la relación de recurrencia, resulta

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n = T_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (2T_{n-1} + 1)x^n.$$

Renombrando los índices y teniendo en cuenta que $T_1 = 1$ se tiene

$$F(x) = x + 2x \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n.$$

Puesto que el último sumatorio corresponde a la serie geométrica a la que le faltan los dos primeros sumandos, se obtiene para $F(x)$ la siguiente ecuación

$$F(x) = x + 2xF(x) + \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x \right).$$

Finalmente,

$$F(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x},$$

que es la resta de dos series geométricas. Por tanto $T_n = 2^n - 1$. ■

Como se ve, las funciones generadoras tienen más aplicaciones que las presentadas en el capítulo anterior y pueden usarse para resolver recurrencias lineales u otras recurrencias más complejas donde los términos se relacionan de forma no lineal [25]. También pueden usarse funciones generadoras de varias variables para resolver otro tipo de problemas, como algunos de tipo combinatorio que aparecen en ajedrez [3].

4.7. Problemas resueltos

1. Se quiere recubrir un rectángulo de tamaño $2 \times n$ con baldosas de tamaños 2×2 y 2×1. Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n, el numero total de recubrimientos diferentes que pueden hacerse.

   Solución. La forma en que se puede encontrar la recurrencia es preguntándose cómo es posible conseguir un recubrimiento de $2 \times n$ a partir de otros más pequeños. Esto se ve bien en la figura 4.4, donde se observa que, si ya tenemos recubierto $2 \times (n-1)$, añadiendo una baldosa 2×1 recubrimos $2 \times n$. Análogamente, si tenemos recubierto $2 \times (n-2)$, añadiendo dos baldosas 2×1 horizontalmente o una baldosa 2×2 recubrimos $2 \times n$.

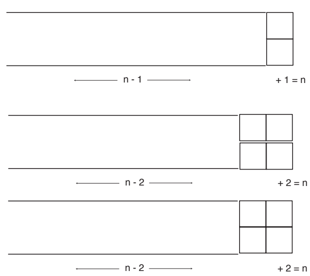


Figura 4.4: Esquema de la recurrencia.

De esta forma, la recurrencia será

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Puesto que la recurrencia es de segundo orden, es necesario conocer los dos primeros términos de la misma. Así, $a_1 = 1$, que es el total de formas en que puede recubrirse un rectángulo 2×1. Del mismo modo, $a_2 = 3$, (dos baldosas 2×1 en horizontal o en vertical o una baldosa 2×2).

Si ahora queremos resolver la recurrencia para encontrar el término general de la misma, buscamos la ecuación característica, que en este caso es $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Las raíces de la misma son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$. Por tanto

$$a_n = A2^n + B(-1)^n,$$

con $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Para obtener A y B debemos resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2A - B = 1 \\ 4A + B = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \frac{2}{3}, \qquad B = \frac{1}{3},$$

y finalmente $a_n = \left(2^{n+1} + (-1)^n\right)/3$. ∎

2. Encuentra una recurrencia para determinar el total de secuencias formadas con 1, 2 y 3 de forma que detrás de un número no puede haber otro mayor. Resuelve la ecuación recurrente encontrada

Solución. Consideremos tres tipos diferentes de secuencias:

- 1_n, secuencias de longitud n que cumplen la propiedad de que detrás de un número no puede haber otro mayor y que acaban en 1.
- 2_n, lo mismo que la anterior pero acabada en 2.
- 3_n, lo mismo, pero acabada en 3.

Es claro que el total de secuencias a_n que satisfacen la propiedad es igual a $1_n + 2_n + 3_n$.
Supongamos que tenemos construidas todas las secuencias hasta longitud n y queremos construir las de longitud $n+1$. Esto puede hacerse sin más que escribir detrás del último número otro, siempre que esto sea posible. De este modo se tiene

$$\begin{aligned} 1_{n+1} &= 1_n + 2_n + 3_n, \\ 2_{n+1} &= 2_n + 3_n, \\ 3_{n+1} &= 3_n. \end{aligned}$$

Esto puede interpretarse como que detrás de una secuencia que acaba en 3 y de longitud n podemos poner cualquier número (1, 2 ó 3) y obtenemos 3 secuencias diferentes de longitud $n+1$, una acabada en 1, otra en 2 y otra en 3. Si la secuencia acaba en 2, sólo podemos añadir un 1 o un 2, generándose dos secuencias nuevas de longitud $n+1$ acabadas una en 1 y otra en 2. Finalmente, si la secuencia acaba en 1, sólo podemos poner al final otro 1, con lo que generamos una única secuencia de longitud $n+1$ acabada en 1.
Sumando las relaciones anteriores se obtiene

$$a_{n+1} = 1_{n+1} + 2_{n+1} + 3_{n+1} = 1_n + 2 \cdot 2_n + 3 \cdot 3_n = 3a_n - 2 \cdot 1_n - 2_n.$$

Puesto que lo que nos interesa es una recurrencia con a_n, debemos eliminar los término en 1_n y 2_n. Esto puede hacerse de varias formas. Aquí proponemos una de ellas. Nótese que

$$1_{n+1} = 1_n + 2_n + 3_n = a_n,$$

por lo que resulta obvio cómo transformar el término en 1_n. Restemos ahora las recurrencias para 1_{n+1} y 2_{n+1} y obtenemos

$$1_{n+1} - 2_{n+1} = 1_n = a_{n-1} \Longrightarrow 2_{n+1} = a_n - a_{n-1} \Longrightarrow 2_n = a_{n-1} - a_{n-2}.$$

Sustituyendo todo esto en la recurrencia para a_{n+1} se obtiene

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} - a_{n-1} + a_{n-2} = 3a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2},$$

que es la recurrencia pedida, que como se ve es de orden 3. Para completarla, es preciso dar los tres primeros valores de la misma. En este sentido tenemos

- $a_1 = 3$, ya que hay tres posibles secuencias de longitud uno que cumplen la propiedad: (1, 2, 3).
- $a_2 = 6$, ya que ahora hay seis posibles secuencias de longitud dos: (11, 21, 22, 31, 32, 33)
- $a_3 = 10$ ya que las posibles secuencias de longitud 3 son (111, 211, 221, 222, 311, 321, 322, 331, 332, 333).

Para resolver la recurrencia planteamos la ecuación característica, que resulta de sustituir a_n por λ^n y simplificar. Para este caso se tiene

$$\lambda^{n+1} = 3\lambda^n - 3\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \Longrightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0.$$

Esta ecuación tiene a 1 como única solución con multiplicidad 3. Así, resulta para a_n la expresión

$$a_n = A \cdot 1^n + Bn \cdot 1^n + Cn^2 \cdot 1^n = A + Bn + Cn^2.$$

Las constantes A, B y C se obtienen a partir de los valores iniciales de la recurrencia. Por simplificar, calculamos el valor de a_0 que en este caso, aplicando la fórmula de la recurrencia, resulta ser 1. De este modo se tiene

$$\begin{array}{ll} n = 0 & a_0 = A + B \cdot 0 + C \cdot 0^2 \Longrightarrow 1 = A \\ n = 1 & a_1 = A + B \cdot 1 + C \cdot 1^2 \Longrightarrow 3 = A + B + C \\ n = 2 & a_2 = A + B \cdot 2 + C \cdot 2^2 \Longrightarrow 6 = A + 2B + 4C. \end{array}$$

Resolviendo el sistema se llega a que $A = 1$, $B = 3/2$ y $C = 1/2$, por lo que

$$a_n = 1 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2. \qquad \blacksquare$$

3. Encuentra una fórmula de recurrencia para determinar el total de secuencias de n dígitos, formadas con las cifras 2, 3, 4 y 5, de forma que el producto de dos elementos consecutivos de la secuencia no sea mayor o igual que 17.

Solución. Sea a_n el total de sucesiones de n dígitos que cumplen la condición del problema. Ahora, dividimos estas sucesiones en cuatro tipos:

- 2_n que son las sucesiones de n dígitos acabadas en 2 que cumplen la condición del problema.
- 3_n que son las sucesiones de n dígitos acabadas en 3 que cumplen la condición del problema.
- 4_n que son las sucesiones de n dígitos acabadas en 4 que cumplen la condición del problema.
- 5_n que son las sucesiones de n dígitos acabadas en 5 que cumplen la condición del problema.

De esta forma se tiene

$$a_n = 2_n + 3_n + 4_n + 5_n. \tag{4.13}$$

Por otra parte, determinemos recurrencias para cada una de las sucesiones en que queda dividida a_n. Así resulta

$$2_{n+1} = 2_n + 3_n + 4_n + 5_n,$$

ya que si añadimos un 2 a cualquier sucesión de n dígitos acabada en 2, 3, 4 ó 5 obtenemos una sucesión de $n + 1$ dígitos acabada en 2 y que no tiene dos consecutivos cuyo producto sea mayor o igual que 17. Análogamente

$$\begin{aligned} 3_{n+1} &= 2_n + 3_n + 4_n + 5_n, \\ 4_{n+1} &= 2_n + 3_n + 4_n, \\ 5_{n+1} &= 2_n + 3_n, \end{aligned}$$

ya que detrás de un 4 no puede haber un 5, lo mismo que detrás de un 5 no puede haber ni un 4 ni un 5.
Teniendo en cuenta (4.13) podemos escribir

$$\begin{aligned} 2_{n+1} &= a_n, \\ 3_{n+1} &= a_n, \\ 4_{n+1} &= 2a_{n-1} + 4_n, \\ 5_{n+1} &= 2a_{n-1}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Si sumamos las cuatro ecuaciones anteriores

$$a_{n+1} = 2a_n + 4a_{n-1} + 4_n.$$

Si tomamos el siguiente término de la sucesión

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 4a_n + 4_{n+1}$$

y restamos, resulta

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n - 4a_{n-1} + 4_{n+1} - 4_n. \tag{4.15}$$

Considerando ahora la tercera ecuación de (4.14) tenemos

$$4_{n+1} - 4_n = 2a_{n-1}.$$

Sustituyendo en (4.15) se llega a la siguiente ecuación para la recurrencia

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n - 2a_{n-1},$$

que da lugar a la ecuación característica

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda = -1, 2 \pm \sqrt{2}$. Por tanto

$$a_n = A(-1)^n + B(2+\sqrt{2})^n + C(2-\sqrt{2})^n.$$

Para determinar A, B y C es preciso dar los tres primeros términos de la recurrencia. Para ello basta listar todas las posibles secuencias con uno, dos y tres dígitos cumpliendo las condiciones del problema. Estas secuencias se muestran en la tabla anterior.

Tabla 4.1: Secuencias de uno, dos y tres dígitos que cumplen las condiciones del tercer problema resuelto.

n	secuencias	a_n
1	2 3 4 5	4
2	22 23 24 25 32 33 34 35 42 43 44 52 53	13
3	222 223 224 225 232 233 234 235 242 243 244 252 253 322 323 324 325 332 333 334 335 342 343 344 352 353 422 423 424 425 432 433 434 435 442 443 444 522 523 524 525 532 533 534 535	45

Por lo tanto, se tiene que $a_1 = 4$, $a_2 = 13$ y $a_3 = 45$ y por la ecuación de la recurrencia $a_0 = 1$. Finalmente, obtenemos A, B y C del sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ll} n = 0 & 1 = A + B + C, \\ n = 1 & 4 = -A + B(2+\sqrt{2}) + C(2-\sqrt{2}), \\ n = 2 & 13 = A + B(2+\sqrt{2})^2 + C(2-\sqrt{2})^2, \end{array}$$

de donde resulta

$$A = -1/7, \quad B = (21\sqrt{2} - 4)/28 \quad \text{y}\, C = (18 - 11\sqrt{2})/28. \qquad \blacksquare$$

4.8. Problemas propuestos

1. Encuentra el término general de las siguientes sucesiones definidas de forma recurrente:

   a) $a_0 = 1; \quad a_1 = 1; \quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0, \quad n \geq 0.$

   b) $a_0 = a_1 = 1; \quad a_n = a_{n-2}, \quad n \geq 2.$

   c) $a_0 = a_1 = 1; \quad a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}, \quad n \geq 2.$

   d) $a_0 = a_1 = 1; \quad a_2 = 2; \quad a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}, \quad n \geq 3.$

2. Transforma la siguiente sucesión recurrente no homogénea en otra homogénea

   $$g_0 = g_1 = 1; \qquad g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + (-1)^n, \quad \text{para } n \geq 2$$

   y determina el término general de la misma.

3. Encuentra una relación de recurrencia para el número de formas en que pueden aparcarse coches de 3 tipos en n huecos, si los coches de los dos primeros tipos ocupan 2 huecos y los del tercer tipo uno.

4. Encuentra una relación de recurrencia para el número de formas en que puede subirse una escalera de n peldaños si pueden darse pasos de 1, 2 ó 3 peldaños.

5. Se quiere formar una pila con n discos de colores rojo, blanco y azul de forma que no haya 2 discos rojos consecutivos. Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n, el número total de pilas diferentes que pueden hacerse y resuélvela.

6. Dentro de un reactor nuclear hay dos tipos de partículas, α y β. En cada segundo una partícula α se divide en tres partículas β, y una partícula β se divide en una α y dos β. Si sólo hay una partícula α en el reactor cuando $t = 0$, encuentra una relación de recurrencia para calcular α_n y β_n, el número de partículas de cada tipo para $t = n$ y resuelve las recurrencias.

7. Encuentra una fórmula de recurrencia para determinar el total de secuencias de n dígitos, formadas con las cifras 0, 1 y 2, que contengan el patrón 12 una sóla vez y justo al final de la secuencia.

8. Se quiere formar una pila con n discos de colores rojo, blanco, verde y azul de forma que no haya un disco rojo y otro blanco consecutivos. Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n, el número total de pilas diferentes que pueden hacerse.

9. Encuentra una fórmula de recurrencia para determinar el total de secuencias de n dígitos, formadas con las cifras 0, 1, 2 y 3, de forma que el producto de dos elementos consecutivos de la secuencia no sea mayor o igual que 4.

10. Encuentra una recurrencia para determinar a_n, el total de secuencias de longitud n formadas con 0, 1 y 2, de forma que dos números consecutivos se diferencien, a lo sumo, en uno.

11. Encuentra una recurrencia para determinar a_n, el total de secuencias de longitud n formadas con 0 y 1, de forma que no aparezca el patrón 100.

12. Encuentra, sin resolver, una recurrencia que determine a_n, el total de secuencias de longitud n formadas con 1, 2 y 3, de forma que no aparezca el patrón 123.

13. Encuentra una recurrencia para determinar a_n, el total de secuencias de longitud n formadas con 0, 1, 2 y 3 de forma que la diferencia, en valor absoluto, entre dos números consecutivos de la secuencia sea menor que 2.

14. Encuentra una recurrencia para determinar a_n, el total de secuencias de longitud n formadas con 0, 1, 2 y 3 de forma que detrás de un 0 ó un 1 no pueda haber un 3.

15. Encuentra una recurrencia para determinar el total de secuencias formadas con 1, 2, 3, 4, 5, 6 de forma que no contenga dos unos consecutivos.

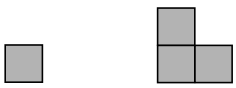
16. Se tiene un conjunto de k símbolos. Encuentra una recurrencia para determinar el total de secuencias formadas con dichos símbolos de forma que el primer símbolo no aparezca dos veces seguidas. ¿Y si ningún símbolo puede estar dos veces seguidas?

17. Se tienen dos conjuntos de símbolos: A con k elementos y B con j elementos. Encuentra una recurrencia para determinar el total de secuencias formadas con dichos símbolos de forma que no haya dos símbolos consecutivos del conjunto B.

18. Se tienen dos conjuntos de símbolos: A con k elementos y B con j elementos. Encuentra una recurrencia para determinar el total de secuencias formadas con dichos símbolos de forma que no haya dos símbolos consecutivos ni del conjunto A ni del conjunto B.

19. Encuentra una fórmula de recurrencia para determinar el total de secuencias de n dígitos, formadas con las cifras 1, 2, 3 y 4, de manera que no haya un 2 a la derecha de un 1 (no importa si hay otras cifras intermedias).

20. Tenemos un rectángulo de dimensión $2 \times n$ que queremos recubrir con baldosas de la forma



Encuentra una relación de recurrencia que determine el total de maneras distintas en que esto puede hacerse.

21. Encuentra una relación de recurrencia que determine el total de maneras en que puede embaldosarse un rectángulo de tamaño $2 \times n$ con baldosas 1×1 y baldosas 2×1.

22. Encuentra una relación de recurrencia que determine el total de maneras en que puede rellenarse una caja de dimensiones $2 \times 2 \times n$ con ladrillos $1 \times 1 \times 2$.

Capítulo 5

Introducción a la teoría de grafos

5.1. Introducción

La teoría de grafos es un campo de las matemáticas cuyo desarrollo ha estado motivado por sus aplicaciones. En sus orígenes se utilizó para la resolución de juegos matemáticos y para el estudio de circuitos eléctricos. No obstante, la teoría de grafos puede usarse para analizar cualquier situación en la que intervenga un conjunto de elementos en el que varios pares de ellos estén relacionados según una misma propiedad, como puede ser un circuito eléctrico, una red de carreteras, una red de comunicaciones, etc.

El origen de la teoría de grafos tiene una clara referencia histórica en el problema de los puentes de Königsberg, resuelto de una manera muy elegante por el matemático suizo Leonhard Euler en 1736.

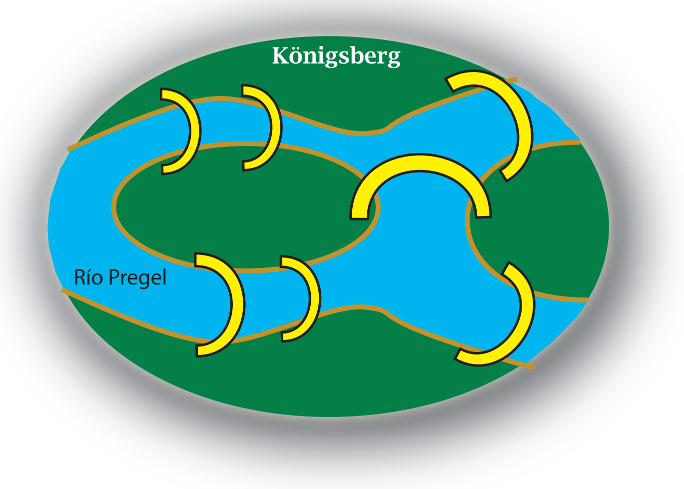


Figura 5.1: Los 7 puentes de Königsberg.

Ejemplo 5.1.- *La antigua ciudad de Königsberg en la Prusia Oriental (actual Kalingrado, en Rusia) estaba situada a orillas del río Pregel (véase la figura 5.1). Parte de la ciudad se encontraba en dos islas que estaban conectadas entre ellas y a las orillas del río por siete puentes. Los habitantes de la ciudad acostumbraban a pasear por la ciudad cruzando los puentes. Algunos de ellos estaban preocupados por el hecho de que no conseguían encontrar un recorrido que atravesara los siete puentes una sola vez. Para su suerte, este problema atrajo la atención de Leonhard Euler quien redujo el problema a un estudio de grafos, donde los vértices son las porciones de tierra y las aristas son los puentes. ¿Puede encontrar el lector la solución?*

Aunque, en un principio, la teoría de grafos parecía de poca relevancia, puesto que los problemas que trataba podían verse como pasatiempos, sus aplicaciones en campos diversos han motivado su desarrollo y su justificación teórica. En este capítulo presentamos las nociones básicas para entender lo que es un grafo, sus propiedades más elementales y algunas de sus aplicaciones. No obstante, para ampliar la información sobre las aplicaciones de los grafos y su presencia en problemas de la vida real, se pueden consultar, entre otros, los textos [5] y [21]. En este texto se presentan los grafos a un nivel introductorio. Para un análisis en mayor profundidad de los grafos en general existen numerosas publicaciones especializadas, como por ejemplo [2] o [14].

5.2. Definición y representación de grafos

Definición 5.1.- *Un* grafo $G = (V, E)$ *consiste en un conjunto finito* V*, cuyos elementos reciben el nombre de* vértices*, y un conjunto* E *de pares de elementos de* V*, cuyos elementos se conocen como* aristas*. Si* $\{u, v\}$ *es una arista de* G*, se dice que los vértices* u *y* v *son* adyacentes *y llamaremos a* u *y* v extremos *de la arista.*

Existen algunas variaciones de la idea de grafo (véase la figura 5.2), como las siguientes:

- *Multigrafos*, grafos con, posiblemente, varias aristas entre dos vértices.
- *Pseudografos*, grafos en donde se permiten aristas cuyos extremos coinciden (*lazos*).
- *Digrafos* o *grafos dirigidos*, grafos en los que se asigna un orden a los extremos de cada arista. En este caso, las aristas dirigidas se denotan de la forma (a, b) y se ha de entender que el orden es importante ($(a, b) \neq (b, a)$). En el caso de una arista dirigida (a, b), al vértice a se le llama *origen* o *fuente* de la arista y al vértice b se le llama *término* o *vértice terminal* de la arista.

Nos referiremos a un *grafo simple* cuando se trate de un grafo no dirigido que además no es multigrafo ni psedografo. En este texto nos dedicaremos fundamentalmente al estudio de los grafos simples, aunque muchos resultados puedan ser extendidos a multigrafos, pseudografos y digrafos.

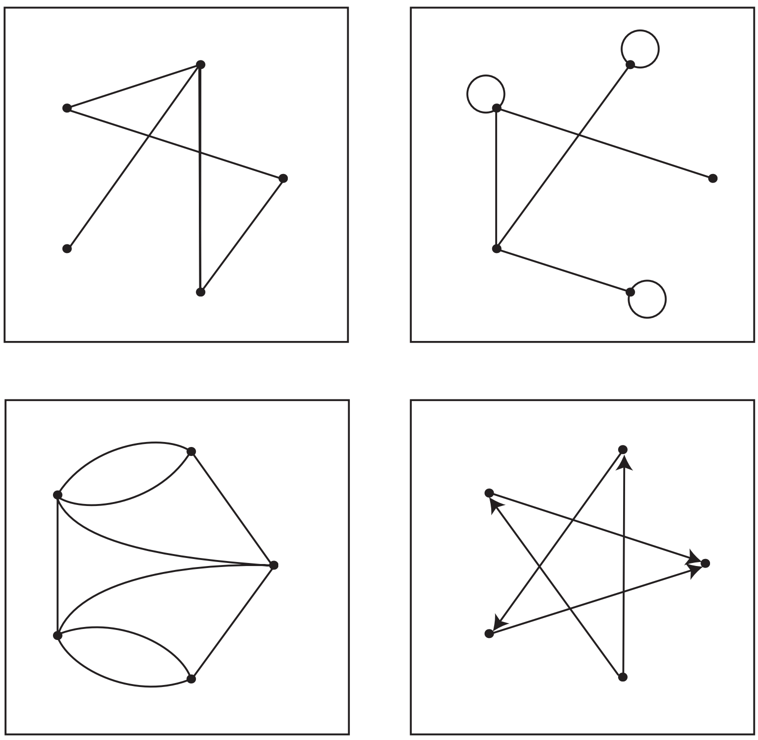


Figura 5.2: Ejemplos de un grafo simple, de un pseudografo, de un multigrafo y de un grafo dirigido.

Definición 5.2.- *El* grado *de un vértice* v*, que denotaremos por* $\delta(v)$*, de un grafo* $G = (V, E)$ *es el número de aristas de* G *que confluyen en* v*. En el caso de los pseudografos, cada lazo contribuye dos veces al grado del vértice correspondiente. Además, diremos que un grafo* $G = (V, E)$*, con* $|V| = n$*, es* regular *(de grado* r*) si* $\delta(x) = \delta(y) = r < n$ *para todo* $x, y \in V$*.*

Los grafos admiten una representación gráfica (de ahí su nombre). Los vértices se representan por puntos y las aristas por líneas que conectan pares de vértices. Esta representación es de gran ayuda para estudiar propiedades de grafos no demasiado grandes. Además, el carácter intuitivo de estas representaciones sirve para formular y entender argumentos abstractos. Así, por ejemplo, se utilizan para estudiar redes de ordenadores, para saber si un circuito se puede implementar sobre un tablero plano, para distinguir compuestos químicos con la misma fórmula molecular, para encontrar el camino más corto en una red de transporte, etc.

Ejemplo 5.2.- *Cinco ciudades a, b, c, d y e están unidas por líneas ferroviarias de todas las formas posibles. El mapa de estas rutas es un grafo con cinco vértices (las ciudades) y diez aristas (las líneas de tren). Su representación gráfica puede verse en el grafo K_5 de la figura 5.3.*

Existen algunos tipos de grafos que, por su utilidad o características especiales, reciben nombres especiales. Veamos algunos de ellos.

Definición 5.3.- *Un grafo en el que cada uno de sus vértices está unido con los demás vértices se llama* grafo completo *(véase la figura 5.3). Se denota K_n al grafo completo con n vértices. Es sencillo comprobar que el número de aristas de K_n es $C(n,2) = n(n-1)/2$.*

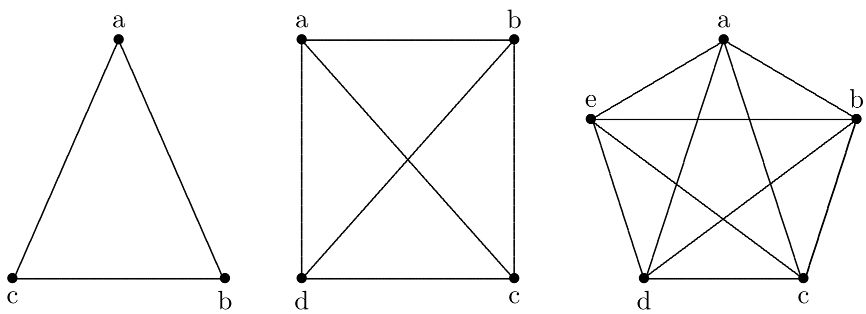


Figura 5.3: Grafos completos K_3, K_4 y K_5.

Otro tipo importante de grafos son los denominados *grafos bipartidos.*

Definición 5.4.- *Un grafo $G = (V, E)$ se denomina* bipartido *si $V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y cada arista de G es de la forma $\{x, y\}$ con $x \in V_1$ e $y \in V_2$. Si cada vértice de V_1 está unido con todo vértice de V_2 y viceversa, se tiene un grafo* bipartido completo*; si $|V_1| = m$ y $|V_2| = n$, el grafo se denota por $K_{m,n}$. Evidentemente, $K_{m,n} = K_{n,m}$.*

Ejemplo 5.3.- *En una competición deportiva, los miembros de un equipo, A, B, C y D, se enfrentan a los miembros de otro equipo, W, X, Y y Z. Los miembros de un mismo equipo no se enfrentan entre sí. La representación gráfica de los partidos entre ambos equipos forma un grafo bipartido $K_{4,4}$ (véase la figura 5.4).*

Definición 5.5.- *Si los vértices de un grafo son $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y las aristas son $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v$ al grafo correspondiente se le llama* ciclo *de n vértices y se le denota por C_n (véase la figura 5.5).*

Definición 5.6.- *La rueda W_n se obtiene añadiendo un vértice adicional a un ciclo y uniendo dicho vértice con los del ciclo mediante las correspondientes n aristas (véase la figura 5.5).*

Definición 5.7.- *El k-*cubo *Q_k es el grafo que tiene por vértices las palabras de longitud k en el alfabeto $\{0, 1\}$ y cuyas aristas unen las palabras que difieren en una posición exactamente (véase la figura 5.6).*

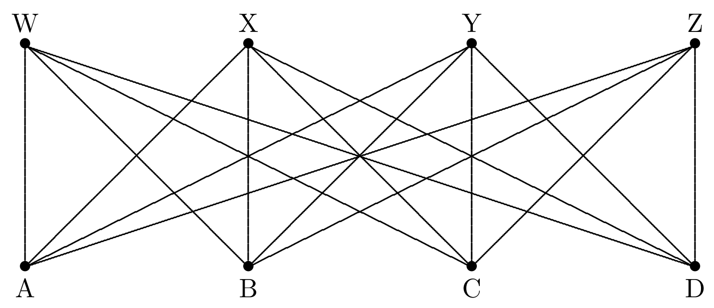


Figura 5.4: Ejemplo de un grafo bipartido completo $K_{4,4}$.

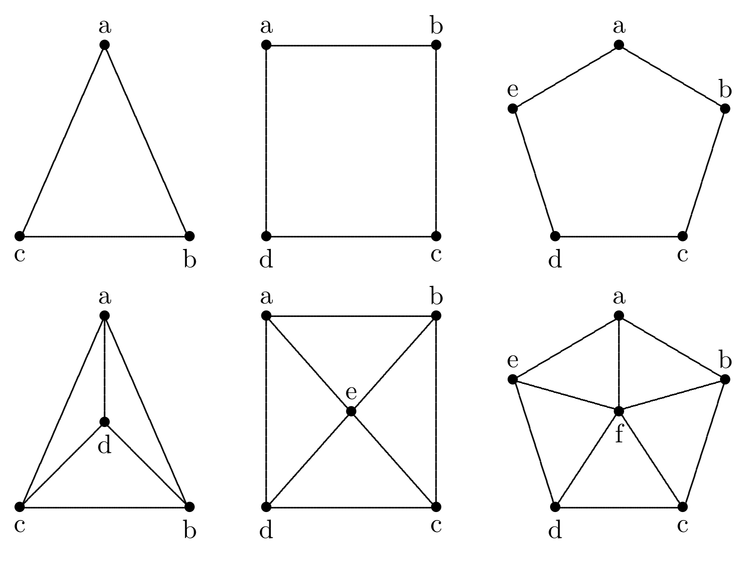


Figura 5.5: Ciclos C_3, C_4 y C_5 y las correspondientes ruedas W_3, W_4 y W_5.

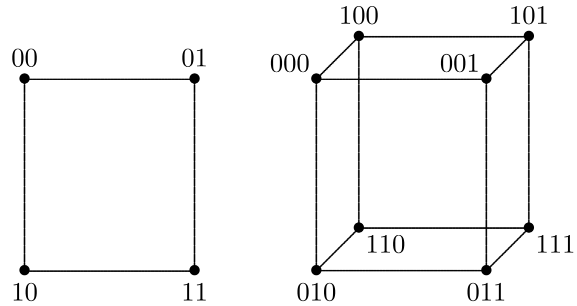


Figura 5.6: El 2-cubo Q_2 y el 3-cubo Q_3.

Por otra parte, un grafo puede ser representado en forma matricial, atendiendo a los adyacentes de cada uno de los vértices.

Definición 5.8.- *Dado un grafo $G = (V, E)$ con $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$, se denomina* matriz de adyacencia *a la matriz $M = (m_{ij})$ de orden $p \times p$ verificando*

$$\begin{array}{ll} m_{ij} = 1 & \{v_i, v_j\} \in E, \\ m_{ij} = 0 & \{v_i, v_j\} \notin E. \end{array}$$

Por ejemplo, las matrices de adyacencia del grafo completo K_5 y del grafo bipartido $K_{4,4}$ son:

$$K_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_{4,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la matriz de adyacencia de un grafo simple es simétrica ($m_{ij} = m_{ji}$ para todo i, j) y además los elementos de la diagonal principal son cero, $a_{ii} = 0$ para todo i.

También se puede definir la matriz de adyacencia para pseudografos (aparece un 1 en la posición a_{ii} si en el vértice v_i hay un lazo), multigrafos (indicando en la posición a_{ij} el número de aristas que unen los vértices v_i y v_j) y grafos dirigidos (en este caso, la matriz puede dejar de ser simétrica).

Finalizamos esta sección con algunos resultados generales sobre grafos. El primero de ellos relaciona los grados de los vértices con el número de aristas y constituye una aplicación de los principios básicos de conteo.

Teorema 5.1.- *La suma de los grados $\delta(v)$ para todos los vértices v de un grafo $G = (V, E)$ es igual al doble del número de aristas:*

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|.$$

Demostración. Como $\delta(v_i)$ es el número de aristas que tienen al vértice v_i por extremo, en

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = \delta(v_1) + \delta(v_2) + \cdots + \delta(v_n)$$

estamos contando todas las aristas del grafo, pero dos veces, ya que toda arista tiene dos vértices en los extremos. Por ejemplo, la arista $\{v_i, v_j\}$ está contada dos veces, una en $\delta(v_i)$ y otra en $\delta(v_j)$. Por lo tanto, $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$. ■

Como caso particular, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 5.2.- *Si G es un grafo regular de grado k, se tiene que $k|V| = 2|E|$.*

Otro corolario útil del teorema anterior es el siguiente.

Corolario 5.3.- (Lema del apretón de manos) *Llamemos* impar *a un vértice de G si su grado es impar y* par *en caso contrario. Entonces, el número de vértices impares es par.*

Este resultado asegura que en cualquier grupo de gente, el número de personas que dan la mano a un número impar de ellas es par.

Ejemplo 5.4.- *En una fiesta hay 35 invitados. Cada uno de ellos estrecha la mano de los invitados que conoce. Entonces siempre hay al menos un invitado que da una cantidad par de apretones de mano.*

Podemos representar esta situación mediante un grafo en el que los vértices son los invitados y las aristas son los apretones de mano entre vértices que se conocen. El grado de cada vértice es el número de apretones de mano que da cada invitado. Si todos los invitados diesen un número impar de apretones, la suma total sería impar, lo que contradice el teorema anterior. En consecuencia, debe haber al menos un invitado que da un número par de apretones de mano.

Obsérvese que hemos probado el resultado con independencia del número de invitados, siempre y cuando éste sea impar. ■

5.3. Isomorfismo de grafos

Tanto la representación gráfica, como la representación matricial no son únicas para un mismo grafo (basta dar una ordenación distinta de los vértices).

Ejemplo 5.5.- *Consideremos los grafos representados en la figura 5.7. Aparentemente, son distintos.*

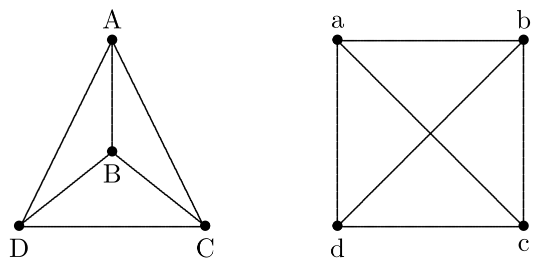


Figura 5.7: Dos grafos isomorfos.

Sin embargo, si nos fijamos con un poco más de detalle, el primero de ellos representa al grafo $G = (V, E)$, donde $V = \{A, B, C, D\}$ y

$$E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}.$$

El segundo representa al grafo $G = (V', E')$, donde $V' = \{a, b, c, d\}$ y

$$E' = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}.$$

Luego ambos representan a un grafo donde cada uno de los vértices está unido con todos los demás, es decir, son representaciones distintas del mismo grafo, con los vértices cambiados.

Por tanto, es evidente que lo importante de un grafo no es su representación gráfica. La propiedad característica de un grafo es la manera en que los vértices están unidos por las aristas. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 5.9.- *Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son* isomorfos *si existe una aplicación biyectiva α entre V_1 y V_2 tal que $\{x, y\} \in E_1$ si y sólo si $\{\alpha(x), \alpha(y)\} \in E_2$. A la biyección α se le denomina* isomorfismo.

Así, en el ejemplo 5.5, la biyección entre los vértices es clara: $\alpha(A) = a$, $\alpha(B) = b$, $\alpha(C) = c$ y $\alpha(D) = d$. En general, para que dos grafos sean isomorfos es evidente que tienen que tener el mismo número de vértices y de aristas. Sin embargo, esto no es suficiente para que dos grafos sean isomorfos. Además, deben conservarse otras propiedades del grafo, algunas de las cuales se introducen en las siguientes definiciones.

Definición 5.10.- *Un* subgrafo *es un grafo formado por un subconjunto de vértices y aristas de un grafo* $G = (V, E)$.

Definición 5.11.- *Dado un grafo* $G = (V, E)$*, su* complementario *es otro grafo* $\bar{G}(V, \bar{E})$ *con el mismo conjunto de vértices pero tal que* $\{x, y\} \in \bar{E}$ *si, y sólo si,* $\{x, y\} \notin E$.

Las siguientes propiedades de los grafos se conservan con el isomorfismo. El hecho de que se cumplan no garantiza que dos grafos sean isomorfos. Ahora bien, si no se cumplen, podemos asegurar que los grafos correspondientes no son isomorfos.

1. El grado de un vértice es una propiedad que se conserva con el isomorfismo, es decir, si un grafo tiene 2 vértices de grado 3 y 4 vértices de grado 2, un grafo isomorfo con él tendrá también 2 vértices de grado 3 y 4 vértices de grado 2.

2. Si dos grafos son isomorfos, también lo son los correspondientes subgrafos. Por ejemplo, si el grafo G_1 contiene un subgrafo completo de orden 3 (K_3), y G_2 es isomorfo a G_1, entonces G_2 contiene un subgrafo K_3.

3. Dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos si, y sólo si, sus complementarios son isomorfos.

El concepto de isomorfismo de grafos puede formularse también de una manera algebraica, en términos de sus matrices de adyacencia y de las denominadas matrices de permutación.

Definición 5.12.- *Una* matriz de permutación *es una matriz cuadrada formada por ceros y unos de modo que sólo hay un 1 en cada fila y columna.*

Por ejemplo, las siguientes matrices son de permutación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cada matriz de este tipo está asociada a una permutación de n elementos. Cuando se multiplica una matriz cuadrada A cualquiera por una matriz de permutación, el resultado es una nueva matriz con las filas o las columnas de A permutadas, según se multiplique por la derecha o por la izquierda.

Teorema 5.4.- *Sean* G_1 *y* G_2 *dos grafos tales que sus correspondientes matrices de adyacencia son* M_1 *y* M_2*. Entonces* G_1 *y* G_2 *son isomorfos si y sólo si existe una matriz de permutación* P *tal que* $M_2 = P^{-1} M_1 P$.

Ejemplo 5.6.- *Los grafos del ejemplo 5.5 tienen ambos la misma matriz de adyacencia:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que, evidentemente, son isomorfos. En este caso la matriz de permutación de la que habla el teorema anterior es la matriz identidad:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

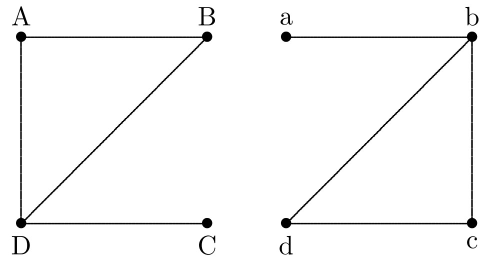


Figura 5.8: Grafos para el ejemplo 5.7.

Ejemplo 5.7.- *Consideremos ahora los grafos de la figura 5.8. Las correspondientes matrices de adyacencia son*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar que $M_2 = P^{-1}M_1P$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y, por tanto, ambos grafos son isomorfos.

5.4. Grafos eulerianos

Los grafos son usados con frecuencia como modelos de situaciones prácticas, como pueden ser redes de comunicaciones o de transporte, en las que intervienen recorridos o caminos.

Definición 5.13.- *Un* recorrido *en un grafo $G = (V, E)$ es una sucesión de vértices de G*

$$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n,$$

tales que v_i y v_{i+1} son adyacentes ($0 \leq i < n$).

Obsérvese que para determinar un recorrido en un multigrafo, tendríamos que precisar tanto la sucesión de vértices adyacentes como las aristas que vamos a recorrer para unirlos.

Si en la sucesión de vértices no hay ninguno repetido se dice que el recorrido es simple *o que tenemos un* camino*. Nótese que si existe un recorrido entre dos vértices x e y, entonces también existe un camino entre ambos vértices.*

A los vértices v_0 y v_n se les denomina extremos *del recorrido y se dice que el recorrido* conecta *o* une *v_0 con v_n. La* longitud *del recorrido es el número n de aristas que contiene.*

Por otra parte, un recorrido se dice cerrado *si sus extremos coinciden, es decir $v_0 = v_n$. Si, además, los únicos vértices repetidos en un recorrido cerrado son los extremos, $v_0 = v_n$, el recorrido se denomina* ciclo*. Si el recorrido cerrado no repite aristas se denomina* circuito*.*

Ejemplo 5.8.- *Consideremos el grafo de la figura 5.9. La sucesión de vértices*

$$v_1 v_2 v_3 v_4 v_2 v_1 v_4$$

es un recorrido de longitud 6. Sin embargo no es ni un camino (pues tiene vértices repetidos) ni un ciclo (no empieza y acaba en el mismo vértice) y tampoco es un circuito (repite aristas).

La sucesión de vértices

$$v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$$

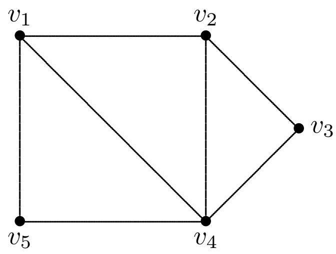


Figura 5.9: Grafo para el ejemplo 5.8.

es un camino de longitud 4 y la sucesión de vértices

$$v_1v_2v_3v_4v_5v_1$$

es un ciclo y también un circuito, en ambos caso de longitud 5. La sucesión

$$v_5v_4v_2v_3v_4v_1v_5$$

es un circuito, pero no es un ciclo. Se trata de un circuito de longitud 6.

Escribamos $x \sim y$ si los vértices x e y de G pueden unirse por un camino en G. Es sencillo comprobar que $\sim$ es una relación de equivalencia (cumple las propiedades reflexiva simétrica y transitiva) en el conjunto V de vértices de G, con lo que V queda dividido en clases de equivalencia disjuntas (véase el texto de Grimaldi [14] para profundizar en estos aspectos). Dos vértices están en la misma clase si pueden unirse por un camino. Cada clase de equivalencia V_i define un subgrafo $G_i = (V_i, E_i)$ que recibe el nombre de *componente*.

Definición 5.14.- *Diremos que un grafo G es* conexo *si tiene una única componente, es decir, si dos vértices cualesquiera se pueden unir por un camino.*

Si hay dos vértices que no se pueden unir por un camino, entonces el grafo es no conexo *o* disconexo.

La terminología casi se explica por sí misma. La descomposición de un grafo en sus componentes es muy útil, ya que varias de las propiedades de los grafos pueden demostrarse considerando cada componente por separado. Por este motivo, los teoremas sobre grafos acostumbran a demostrarse únicamente para grafos conexos.

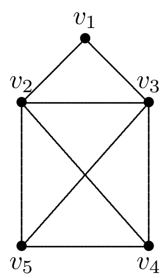
Supuesto que un grafo G es conexo, podemos obtener información sobre el número de recorridos existentes en el mismo a partir de la matriz de adyacencia definida en 5.8. Notemos que $m_{ij} = 1$ indica que existe un camino de longitud 1 entre v_i y v_j. De forma general, las potencias de la matriz de adyacencia M nos dan información sobre los recorridos en el grafo G.

Teorema 5.5.- *Sea $M = (m_{ij})$ la matriz de adyacencia de un grafo G. Entonces, el elemento ij de la matriz M^k nos da el número de recorridos de longitud k entre los vértices v_i y v_j.*

Una consecuencia de este resultado es el siguiente:

Corolario 5.6.- *Sea $M = (m_{ij})$ la matriz de adyacencia de un grafo conexo G. Entonces la distancia entre los vértices v_i y v_j es igual a k si y sólo si k es el menor entero no negativo que cumple que el elemento ij de la matriz M^k es distinto de cero.*

Ejemplo 5.9.- *Consideremos el siguiente grafo, junto con su matriz de adyacencia M y el cuadrado de la misma, M^2:*



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Nótese que en este grafo la distancia máxima entre dos vértices es 2, ya que todo elemento de la matriz M^2 es distinto de cero. Por otra parte, como el elemento $(M^2)_{23} = 3$ se tiene que existen 3 recorridos de longitud 2 entre v_2 y v_3. Si, por ejemplo, queremos encontrar los recorridos de longitud 5 entre esos vértices, tendríamos que calcular la matriz M^5:

$$M^5 = \begin{pmatrix} 34 & 67 & 67 & 52 & 52 \\ 67 & 102 & 103 & 93 & 93 \\ 67 & 103 & 102 & 93 & 93 \\ 52 & 93 & 93 & 76 & 77 \\ 52 & 93 & 93 & 77 & 76 \end{pmatrix}.$$

El resultado es, por tanto, 103 recorridos de longitud 5 entre v_2 y v_3. El lector puede intentar obtener el mismo resultado usando combinatoria.

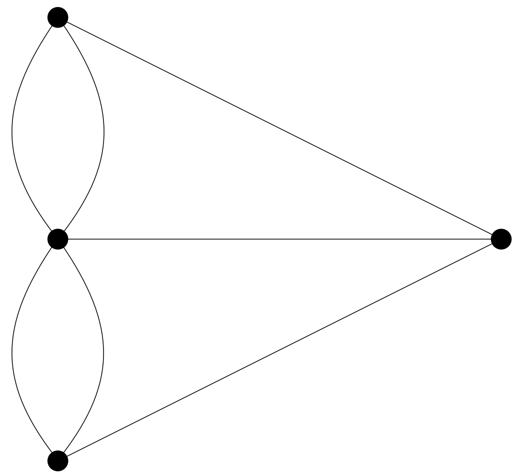


Figura 5.10: Multigrafo para el problema de los 7 puentes de Königsberg.

El problema de los puentes de Königsberg (Ejemplo 5.1) es considerado como el origen histórico de la teoría de grafos desde que, en 1736, Leonhard Euler probó que no podía existir tal recorrido.

Para resolver este problema podemos, en primer lugar, hacer una abstración para quedarnos con las cuestiones esenciales y desechar las irrelevantes. Por ejemplo, en este problema el tamaño de las islas o que los puentes sean largos, cortos, estrechos o anchos parece que no tiene importancia alguna. Lo que parece fundamental es poder realizar el dibujo de la figura 5.10 de un sólo trazo y sin repetir ninguna línea.

Tampoco parece relevante el hecho de tener un multigrafo o un pseudografo, ya que siempre podemos transformar uno de éstos en un grafo simple sin más que introducir un vértice de más en las aristas múltiples o en los lazos.

Estudiando algunos casos sencillos, se intuye que lo que importa en este problema es el número de entradas y salidas de un vértice, es decir, su grado. Es más, parece que lo que puede «atascar» un recorrido es la falta de salida de un vértice, y esto se da cuando el grado es impar.

Definición 5.15.- *En un grafo G se denomina* recorrido euleriano *a un recorrido que contiene todas las aristas del grafo una sola vez. Si el recorrido es cerrado, se denomina* circuito euleriano*. Un grafo que admite un circuito euleriano recibe el nombre de* grafo euleriano.

Atendiendo a su representación gráfica, un grafo euleriano es aquél que puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel y sin pintar dos veces la misma arista.

La caracterización de los grafos eulerianos depende, exclusivamente, de los grados de sus vértices. Así, podemos dar los siguientes resultados.

Teorema 5.7.- (Condición necesaria) *Todos los vértices de un grafo euleriano tienen grado par.*

Teorema 5.8.- (Condición suficiente) *Si G es un grafo conexo y todos sus vértices tienen grado par, entonces admite un circuito euleriano.*

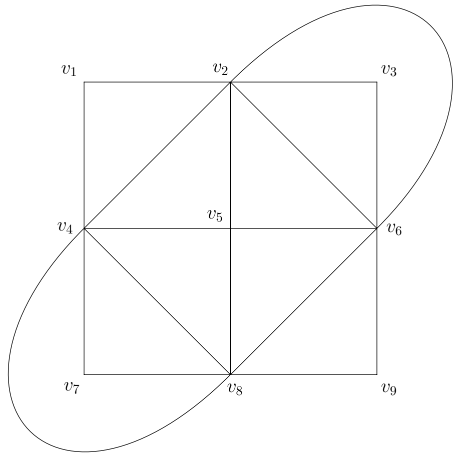


Figura 5.11: Grafo del ejemplo 5.10, donde hay que buscar un circuito euleriano.

Se puede dar una demostración (no rigurosa) de este resultado de forma constructiva, basada en dos ideas:

1. Elegir un circuito cualquiera (tan grande como queramos).
2. «Colgar» otros circuitos de vértices suyos, hasta que recorramos todas las aristas.

Ejemplo 5.10.- *Veamos cómo funciona esta técnica en un caso concreto, como el de encontrar un circuito euleriano en el grafo de la figura 5.11.*

El problema admite muchas soluciones. Vamos a encontrar una de ellas. Para ello tenemos que partir de un circuito cualquiera (aunque no recorra todos los vértices ni todas las aristas). Dependiendo de los circuitos que elijamos, podemos tener diferentes soluciones. Por ejemplo, consideremos como primer circuito: $v_1-v_2-v_3-v_6-v_9-v_8-v_7-v_4-v_1$ y tachemos las aristas utilizadas. Ahora consideramos un segundo circuito entre las aristas restantes, por ejemplo, $v_2 - v_6 - v_8 - v_4 - v_2$, y volvemos a tachar estas aristas. Buscamos un tercer circuito entre las aristas restantes, tal como $v_2 - v_6 - v_5 - v_2$, y eliminamos estas aristas. Finalmente, podemos obtener un último circuito entre las aristas resultantes: $v_4 - v_5 - v_8 - v_4$.

Procedemos ahora a «colgar» el segundo circuito del primero, obteniendo un nuevo circuito de la siguiente forma:

$$v_1 - v_2 - v_6 - v_8 - v_4 - v_2 - v_3 - v_6 - v_9 - v_8 - v_7 - v_4 - v_1.$$

Introducimos ahora el tercer circuito, «colgado» de uno de los vértices v_2:

$$v_1 - v_2 - v_6 - v_8 - v_4 - v_2 - v_6 - v_5 - v_2 - v_3 - v_6 - v_9 - v_8 - v_7 - v_4 - v_1.$$

Finalmente, colgamos el último circuito de uno de los vértices v_4 para obtener así un circuito euleriano:

$$v_1 - v_2 - v_6 - v_8 - v_4 - v_2 - v_6 - -v_5 - v_2 - v_3 - v_6-$$
$$-v_9 - v_8 - v_7 - v_4 - v_5 - v_8 - v_4 - v_1.$$

Como podemos observar, hemos tenido varias opciones tanto a la hora de elegir los circuitos como a la hora de irlos «colgando» unos de otros. En consecuencia, podríamos haber obtenido varias soluciones del problema. Lo realmente importante es darse cuenta de que, si los vértices tienen grado par, con este procedimiento siempre podremos recorrer todas las aristas, agotando todas las entradas y salidas a un vértice y sin quedarnos nunca atascados. ∎

Como consecuencia inmediata de los resultados anteriores, se tiene que un grafo G tiene un recorrido euleriano si, y sólo si, es conexo y tiene, a lo sumo, dos vértices de grado impar. En tal caso, el recorrido empieza en un vértice de grado impar y acaba en el otro. Se puede añadir una arista imaginaria entre los dos vértices de grado impar y emplear el proceso anterior para construir un ciclo euleriano, comenzando en un vértice de grado impar y terminando (o empezando) el ciclo con la arista imaginaria que lo «une» con el otro vértice de grado impar.

Una variante del problema de encontrar un circuito euleriano es el conocido como *problema del cartero chino*. Partiendo de un caso en el que no sea posible encontrar un circuito euleriano, se trata buscar un circuito en el que se «reutilicen» el menor número de aristas posibles. Este proceso se conoce con el nombre de «eulerización» de un grafo. Se permite usar más de una vez una arista ya existente, sin introducir aristas nuevas. Existen técnicas para eulerizar un grafo y para buscar la eulerización óptima, pues pueden existir varias.

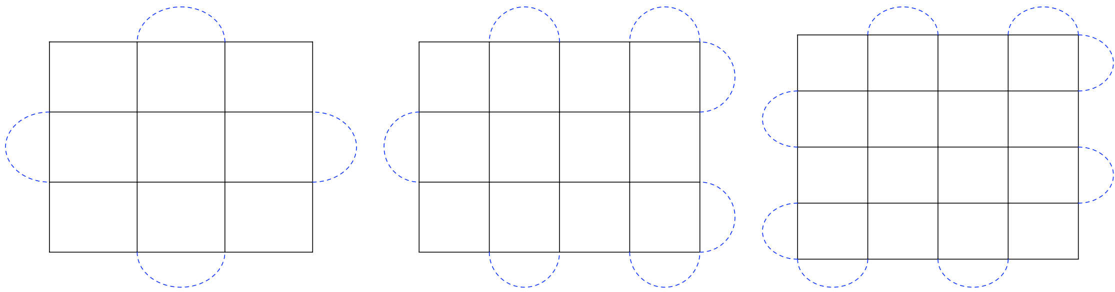


Figura 5.12: Técnica del «corredor de aristas» para redes de tamaños 3×3, 3×4 y 4×4.

En el caso de redes rectangulares, podemos emplear la técnica del «corredor de aristas», que consiste en comenzar por una esquina, recorrer el límite exterior del rectángulo (por ejemplo en sentido horario) y añadir aristas según las siguientes reglas:

- Si se encuentra un vértice v con $\delta(v)$ impar, se añade una arista, uniéndolo con el siguiente.
- Si el nuevo grado del vértice siguiente es par, sigue corriendo. Si es impar, se añade una nueva arista, y así sucesivamente.

En la figura 5.12 se muestra el comportamiento a seguir en los tres posibles patrones que nos podemos encontrar. Si m y n denotan el número de filas y columnas de una red rectangular, podemos distinguir los casos en que m y n son ambos pares, ambos impares o uno par y otro impar.

5.5. Grafos hamiltonianos

Otro problema famoso de la teoría de grafos consiste en determinar un ciclo que contenga a todos los vértices. El origen de este problema se remonta a 1859 cuando el matemático irlandés William Hamilton diseñó un juego que estaba formado por un dodecaedro regular con las 20 esquinas etiquetadas con nombres de ciudades importantes.

El objetivo del juego era encontrar un ciclo entre las aristas del sólido que visitara cada ciudad una sola vez. Aunque este juego no tuvo demasiado éxito comercial (es fácil encontrar una solución, como se puede comprobar en la figura 5.13), dio origen a la siguiente definición.

Definición 5.16.- *Se dice que un grafo $G = (V, E)$ tiene un* ciclo hamiltoniano *si existe un ciclo de G que contiene a todos los vértices de V. Un* camino hamiltoniano *es un camino de G que contiene todos los vértices. Un grafo que contiene un ciclo hamiltoniano se denomina* grafo hamiltoniano.

Al contrario que sucede con los grafos eulerianos no se conoce un criterio sencillo de aplicar para decidir si un grafo es hamiltoniano o no. No obstante, existen bastantes resultados al respecto, algunos de los cuales enunciamos a continuación. En [14] pueden consultarse las demostraciones de estos resultados.

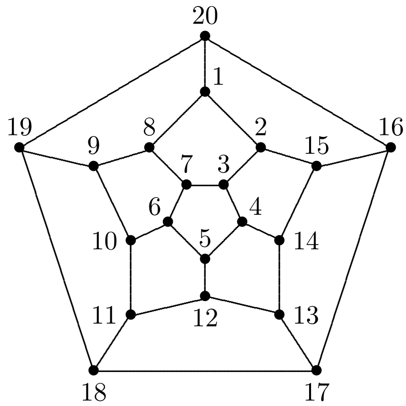


Figura 5.13: Dodecaedro para el juego del viajero de Hamilton.

Teorema 5.9.- (Condición suficiente) *Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo con $|V| = n \geq 3$. Si $\delta(x) + \delta(y) \geq n - 1$ para todo x e y de V, con $x \neq y$, entonces G tiene un camino hamiltoniano. Como consecuencia de esto, si $\delta(v) \geq (n-1)/2$ para todo $v \in V$, entonces G tiene un camino hamiltoniano. Además si $\delta(v) \geq n/2$ para todo $v \in V$, entonces G es hamiltoniano.*

La condición que asegura que G es hamiltoniano si $\delta(v) \geq n/2$ para todo $v \in V$, se conoce como Teorema de Dirac. Una aplicación inmediata de este resultado permite comprobar que los grafos completos K_n son hamiltonianos para $n \geq 3$. En efecto, como $\delta(v) = n - 1$ para todo $v \in V$, se tiene que $n - 1 \geq n/2$.

Teorema 5.10.- (Condición necesaria) *Sea un grafo hamiltoniano $G = (V, E)$ con $|V| \geq 3$. Entonces para cada subconjunto U de V, el subgrafo de G cuyos vértices son los de $V \setminus U$ y cuyas aristas son las que tienen extremos en $V \setminus U$, tiene a lo sumo $|U|$ componentes.*

Un caso particular de este resultado, más sencillo de aplicar en la práctica, nos proporciona un criterio para determinar cuándo un grafo no es hamiltoniano.

Corolario 5.11.- *Se llama* punto de corte *en un grafo a un vértice v tal que al eliminar v y las aristas que lo tienen por extremo, el grafo resultante resulta disconexo. Entonces, un grafo hamiltoniano no tiene puntos de corte.*

No obstante, puede haber grafos sin puntos de corte que no sean hamiltonianos (véase el ejemplo 5.11).

A pesar de los resultados anteriores, en la práctica suelen usarse una serie de reglas sencillas que permitan decidir si un grafo es o no hamiltoniano, ya que las condiciones suficientes son muy fuertes y la condición necesaria muy débil. Estas reglas pueden resumirse en cuatro:

1. Si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces para todo $v \in V$, $\delta(v) \geq 2$.

2. Si $v \in V$ y $\delta(v) = 2$, entonces las dos aristas incidentes en v pertenecen a cualquier posible ciclo hamiltoniano.

3. Si $v \in V$ y $\delta(v) > 2$, entonces cuando se intenta construir un ciclo hamiltoniano, una vez que se pase por v, las aristas no utilizadas incidentes en v dejan de tenerse en cuenta.

4. Construyendo un ciclo hamiltoniano no puede obtenerse un ciclo para un subgrafo, a menos que contenga a todos los vértices.

Ejemplo 5.11.- *Comprueba si el grafo de la figura 5.14 es hamiltoniano o no.*

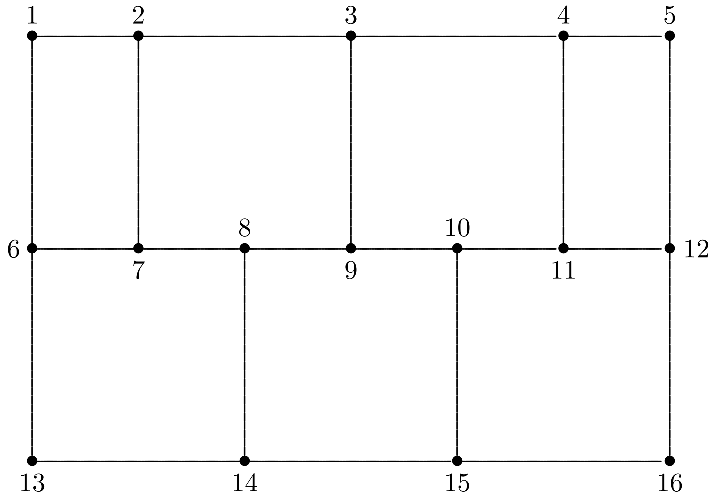


Figura 5.14: ¿Es posible encontrar un ciclo hamiltoniano en el este grafo?

En primer lugar, observamos que los vértices $1, 5, 13$ y 16 tienen grado 2, luego las aristas que confluyen en dichos vértices deben pertenecer al ciclo. Como 2 de las 3 aristas de los vértices 6 y 12 ya han sido usadas, la otra no puede estar en el ciclo.

Ahora, los vértices 7 y 11 tienen grado 2, luego las aristas que confluyen en dichos vértices deben pertenecer al ciclo. Entonces, 2 de las 3 aristas de los vértices 2 y 4 ya han sido usadas, luego hay que quitar la otra.

En esta situación, el vértice 3 queda con grado uno, luego no se puede encontrar un ciclo hamiltoniano.

Observemos que este grafo no es hamiltoniano y no presenta ningún punto de corte. ■

Ejemplo 5.12.- *¿Puede ser hamiltoniano un grafo bipartido conexo?*

Un grafo bipartido tiene sus vértices divididos en dos conjuntos, que vamos a etiquetar como los vértices rojos y los vértices azules, de forma que cada arista conecta un vértice rojo con un vértice azul. Como un ciclo hamiltoniano va alternando vértices rojos con vértices azules, su número debe ser el mismo. Es decir, si $G = (V, E)$, con $V = R \cup A$, donde R es el conjunto de vértices rojos y A es el conjunto de vértices azules, tiene que ocurrir que $|R| = |A|$. Notemos que ésta es una condición necesaria, pero no suficiente. Sólo en el caso de tener un grafo bipartido completo la condición anterior es necesaria y suficiente. ■

En ocasiones, no basta con encontrar un ciclo hamiltoniano, sino exigir además que cumpla una serie de restricciones, como pueden ser minimizar el coste o la longitud de un trayecto, dando lugar al que se conoce como el *problema del viajante*. Veamos un ejemplo sencillo de esta situación.

Ejemplo 5.13.- *Una pareja de Logroño planea sus próximas vacaciones en las que quiere visitar a unos amigos que residen en Pamplona, Santander y Toledo. Se plantean de cuántas formas pueden realizar el recorrido y si hay alguna opción que minimice el número de kilómetros que tienen que conducir.*

El problema se puede modelizar con el grafo de la figura 5.15, donde hemos etiquetado las aristas con el número de kilómetros entre las dos ciudades (vértices) correspondientes.

Podemos comprobar que existen 6 ciclos diferentes, aunque algunos de ellos dan lugar a rutas con el mismo número de kilómetros. En efecto, los ciclos LPSTL y LTSPL tienen una longitud de 1 237 km., los ciclos LPTSL y LSTPL tienen una longitud de 1 273 km. y los ciclos LSPTL y LTPSL tienen una longitud de 1 324 km. Así, cualquiera de las dos primeras rutas es óptima, en el sentido de que se minimiza el número de kilómetros necesarios para hacer el recorrido. ■

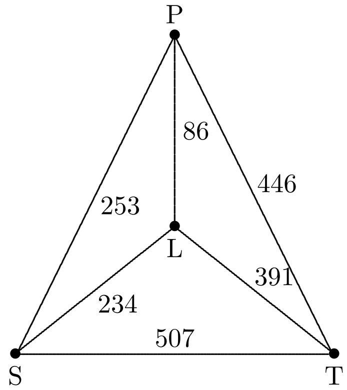


Figura 5.15: Distancias kilométricas entre Logroño, Pamplona, Santander y Toledo.

Para intentar resolver el problema del viajante se usan técnicas que necesitan el manejo de árboles y que veremos más adelante en el tema 6. Aun así, podemos adelantar que encontrar la solución exacta de este tipo de problemas suele conllevar un coste computacional muy elevado. Así, por ejemplo, en un grafo completo K_n hay $(n-1)!$ posibles ciclos hamiltonianos y el número de casos a considerar crece exponencialmente con n.

A pesar del enorme esfuerzo realizado a partir de la segunda mitad del siglo XX por investigadores en matemáticas, informática o investigación operativa, el problema del viajante sigue siendo un problema abierto. Aunque hay métodos que reducen significativamente el número de casos a estudiar, cuando el número de datos es grande el problema del viajante sigue siendo intratable. Por eso, en ocasiones, en lugar de buscar la solución exacta por un algoritmo ineficiente, es mejor buscar una solución aproximada por un algoritmo más eficiente. Para más información sobre el «estado del arte» de este problema se puede consultar la página web [31].

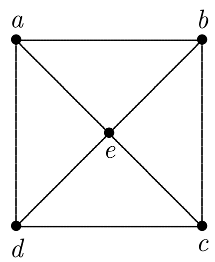
5.6. Grafos planos

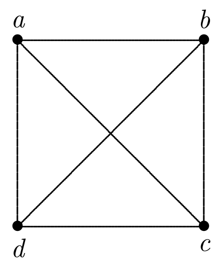
Ya se ha comentado la aparición de los grafos como modelo en diferentes situaciones prácticas, lo que ha llevado a introducir los grafos eulerianos y hamiltonianos. Otro ejemplo muy típico de un grafo nos lo proporcionan los mapas de carreteras. Este es el ejemplo natural de lo que se conoce como un *grafo plano*. En este caso las aristas indican los caminos o carreteras y se cortan sólo en los puntos de confluencia o poblaciones (vértices). En ocasiones las carreteras parecen intersecarse cuando una pasa sobre otra, como en un paso elevado. En esta situación las dos carreteras se encuentran en niveles o planos diferentes.

Definición 5.17.- *Un grafo G se denomina* plano *si se puede dibujar en el plano con sus aristas intersecándose sólo en los vértices de G.*

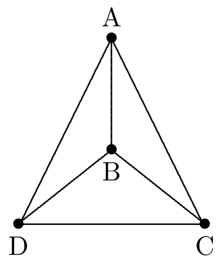
Un mapa *es una representación geométrica de un grafo en la que las aristas sólo se cortan en los vértices.*

Ejemplo 5.14.- *Analiza si los siguientes grafos son planos:*





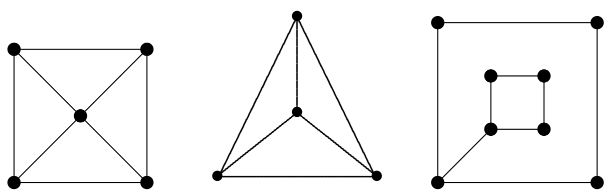
Observemos en primer lugar que los dos grafos no son isosmorfos, pues el primero tiene 5 vértices mientras que el segundo tiene sólo 4. El primero, evidentemente es plano. El segundo no está tan claro que lo sea, puesto que la representación gráfica que nos dan contiene aristas que se cortan en un punto que no es un vértice. Sin embargo, como ya hemos visto en el ejemplo 5.5, el segundo grafo es isomorfo al grafo siguiente



y, por tanto, es también plano. ■

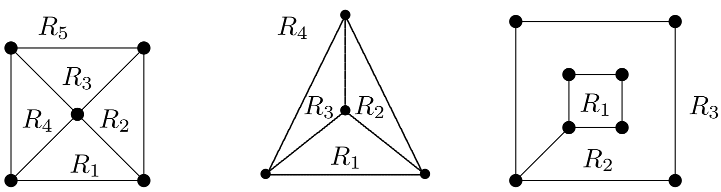
Definición 5.18.- *Un mapa divide al plano en varias* regiones*. Una de ellas no está acotada y se llama* región exterior*. Se llama* grado de una región R, $\delta(R)$*, a la longitud del camino cerrado que la bordea.*

Ejemplo 5.15.- *Los mapas*



dividen al plano en 5 regiones, 4 regiones y 3 regiones respectivamente.

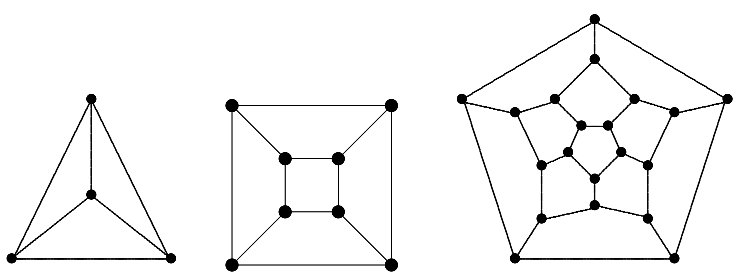
En efecto, tenemos que las regiones son:



En el primer mapa, $\delta(R_1) = \delta(R_2) = \delta(R_3) = \delta(R_4) = 3$ y $\delta(R_5) = 4$. En el segundo mapa, $\delta(R_1) = \delta(R_2) = \delta(R_3) = \delta(R_4) = 3$. En el tercer mapa, $\delta(R_1) = 4$, $\delta(R_2) = 10$ y $\delta(R_3) = 4$. ■

Notemos que el camino cerrado que bordea una región no tiene por qué ser ciclo ni circuito (puede repetir vértices o aristas).

Ejemplo 5.16.- *Todo poliedro se puede transformar en un mapa, haciendo corresponder una de las caras con la región exterior. Así, por ejemplo, los grafos*



representan los mapas obtenidos a partir de un tetraedro, un cubo y un dodecaedro respectivamente. ¿Cuáles son los mapas que se obtendrían a partir del octaedro y del icosaedro?

Teorema 5.12.- *Sean $R_1, R_2, \ldots, R_n$ las regiones de un mapa conexo. Entonces*

$$\delta(R_1) + \cdots + \delta(R_n) = 2|E|,$$

siendo $|E|$ el número de aristas del grafo.

Demostración. Sea a una arista cualquiera. Pueden ocurrir dos casos:

- a está en el camino que bordea dos regiones distintas.
- a está en el borde de una única región.

En el primer caso, a se cuenta dos veces, una por cada región. En el segundo caso, a también se cuenta dos veces, ya que se recorre dos veces. Por tanto, en el recuento de los grados de las regiones, cada arista se cuenta dos veces y de ahí se obtiene el resultado. ■

Entre todos los poliedros existen unos particularmente importantes por sus propiedades, belleza y presencia en la vida real: *los poliedros regulares*. También se les conoce con el nombre de *cuerpos platónicos*, en honor a Platón que ya los citaba en el siglo IV a. C., aunque lo cierto es que no se sabe en qué época llegaron a conocerse.

Se define un *poliedro regular* como aquél en el que sus caras son polígonos regulares iguales y todos los anguloides o ángulos poliedros iguales. Equivalentemente, un poliedro es regular si todas sus caras son polígonos regulares iguales y todos sus vértices son del mismo orden.

Se puede probar, de forma razonada, que únicamente existen cinco poliedros regulares, los de la figura 5.16.

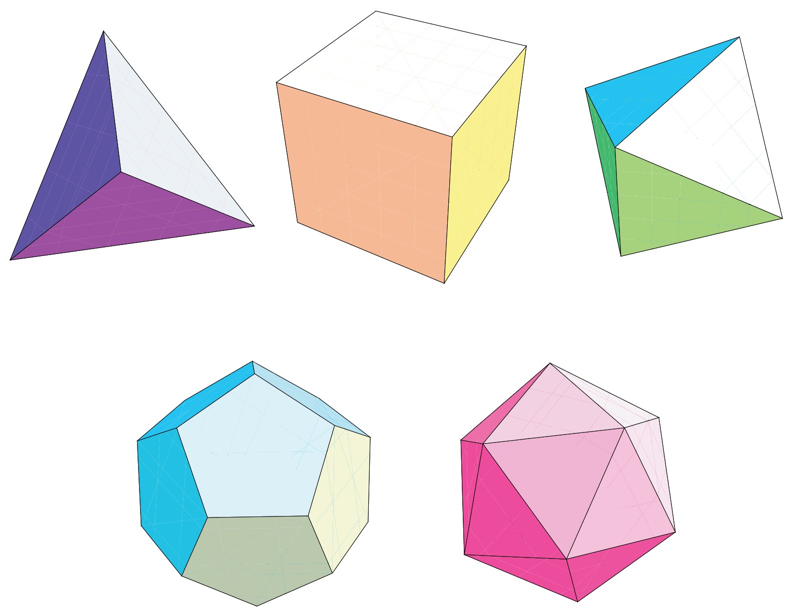


Figura 5.16: Los cinco poliedros regulares: el tetraedro, el cubo o hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Una buena manera de construir estos poliedros es a partir de su desarrollo en forma de recortable (figura 5.17).

Para Platón los elementos últimos de la materia son los poliedros regulares. Así:

- Al fuego le asigna el tetraedro: *«. . . el fuego tiene la forma del tetraedro, pues el fuego es el elemento más pequeño, ligero, móvil y agudo. . . »*.
- A la tierra, el cubo: *«. . . la tierra debe tener la forma del cubo, el sólido más estable de los cinco. . . »*.
- El aire se corresponde con el octaedro: *«. . . el aire, de tamaño, peso y fluidez, en cierto modo, intermedios, se compone de octaedros. . . »*.

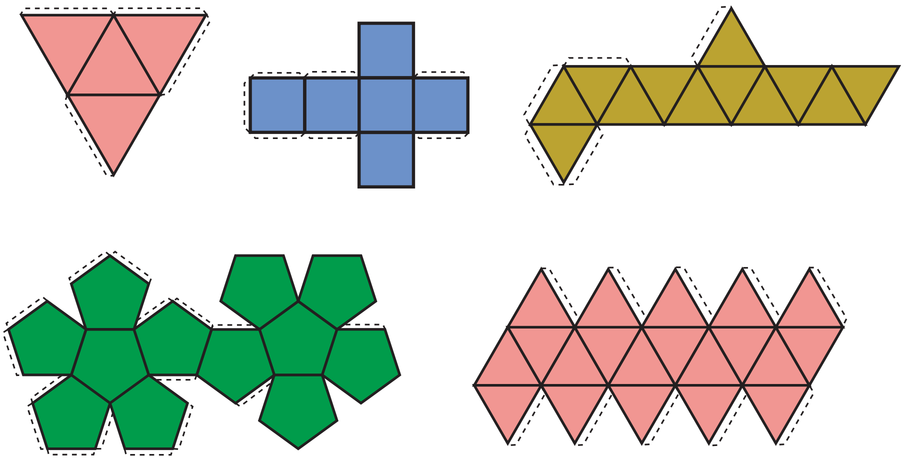


Figura 5.17: Desarrollo de los poliedros regulares.

- El agua, con el icosaedro: *«. . . el agua, el más móvil y fluido de los elementos, debe tener como forma propia, o semilla, el icosaedro, el sólido más cercano a la esfera y, por tanto, el que, con mayor probabilidad, puede rodar fácilmente. . . »*.
- Finalmente, el dodecaedro se corresponde con el universo: *«. . . es la forma que los dioses emplean para disponer las constelaciones en los cielos. . . »*.

A finales del siglo XVI, el astrónomo J. Kepler imaginó una relación entre los cinco poliedros regulares y las órbitas de los planetas del sistema solar entonces conocidos (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno). Según él cada planeta se movía en una esfera separada de la contigua por un sólido platónico.

Una vez hecha esta pequeña incursión por la historia de los poliedros regulares, volvemos a la teoría de grafos, observando que en todo poliedro (regular o no), se cumple la siguiente relación:

$$c + v = e + 2,$$

siendo c, v y e el número de caras, vértices y aristas del poliedro. Esta relación se conoce como *fórmula de Euler* para los poliedros.

Si tenemos en cuenta que al pasar de un poliedro a un mapa, las caras del poliedro se transforman en las regiones del mapa, nos podemos preguntar ahora si esta relación se mantiene para un mapa cualquiera. Así, el número de vértices, regiones y aristas de los mapas del ejemplo 5.15 se muestra en la tabla 5.1.

Tabla 5.1: Número de vértices, regiones y aristas de los mapas del ejemplo 5.15.

	$\|V\|$	$\|R\|$	$\|E\|$
i)	5	5	8
ii)	4	4	6
iii)	8	3	9

Por tanto se cumple la relación $|V| + |R| = |E| + 2$. Como veremos, esta igualdad se cumple en todo grafo plano, como afirma el siguiente resultado, que permite caracterizar los grafos planos por medio de las regiones en que queda dividido el plano por las aristas del mismo.

Teorema 5.13.- (Fórmula de Euler) *Sea $G = (V, E)$ un grafo plano conexo. Entonces,*

$$|V| + |R| = |E| + 2.$$

Demostración. Se puede demostrar usando el principio de inducción sobre el número de aristas. Denotamos $e = |E|$, $v = |V|$ y $r = |R|$. En efecto, si $e = 0$, el grafo queda reducido a un único vértice. Por tanto, $v = 1$, $r = 1$ y se cumple la fórmula de Euler.

Suponemos que la fórmula de Euler es cierta para grafos planos conexos con e aristas, $0 \leq e \leq k$. Sea G un grafo plano conexo con $e = k+1$ aristas. Elegimos una arista cualquiera de G, con vértices a y b y denotamos H al subgrafo de G obtenido al eliminar la arista $\{a, b\}$. Pueden ocurrir dos cosas: que H sea conexo o que no lo sea. En el primer caso, H tiene v vértices, k aristas y $r-1$ regiones. Podemos aplicar la hipótesis de inducción y deducir que $v+r-1 = k+2$, o lo que es igual, $v+r = (k+1)+2 = e+2$.

Si H no es conexo, queda dividido en dos subgrafos, H_1 y H_2. Sean v_i, r_i y e_i el número de vértices, regiones y aristas de H_i para $i = 1, 2$. Entonces $v_1 + v_2 = v$, $e_1 + e_2 = k$ y $r_1 + r_2 = r+1$ ya que H_1 y H_2 delimitan cada uno su propia región infinita. Como H_1 y H_2 tienen cada uno un número de aristas menor o igual que k, podemos usar la hipótesis de inducción para deducir que $v_1 + r_1 = e_1 + 2$, $v_2 + r_2 = e_2 + 2$. Sumando ambas igualdades se obtiene $v + r + 1 = k + 4$ o, equivalentemente, $v + r = (k+1) + 2 = e + 2$.

Por lo tanto, en ambos casos, vemos que se cumple la fórmula de Euler para el grafo G. ∎

Ejemplo 5.17.- *Si G es un grafo conexo, 4-regular, con 16 aristas y M es un mapa de G, ¿cuántas regiones tiene?*

Por la fórmula de Euler, $|R| = |E|+2-|V|$. Como además el grafo es 4-regular, $4|V| = 2|E| = 32$, luego $|V| = 8$ y $|R| = 10$. ∎

Se pueden extraer varias conclusiones interesantes a partir de la fórmula de Euler. La primera de ellas es observar que aunque un grafo G puede admitir distintos mapas, el número de regiones es el mismo en todos los mapas. Esto es debido a que $|R| = |E| + 2 - |V|$. Como $|V|$ y $|E|$ dependen del grafo y no del mapa, $|R|$ también.

En la segunda cuantificaremos la idea intuitiva de que cuantas más aristas tenga un grafo, más difícil será dibujarlas sin que se corten. Más concretamente, podemos dar los siguientes resultados.

Teorema 5.14 *Sea $G = (V, E)$ un grafo plano conexo con más de 3 vértices. Entonces,*

$$|E| \leq 3(|V| - 2).$$

Demostración. Sea M un mapa que representa a G. El grado de cada región de M no puede ser 1 (sería un lazo) ni 2 (sería un multigrafo). Por tanto, $\delta(R) \geq 3$ para toda región R. Entonces, si $R_1, \ldots, R_n$ son las regiones de M,

$$2|E| = \delta(R_1) + \cdots + \delta(R_n) \geq 3|R| \Rightarrow |R| \leq 2|E|/3.$$

Además, por la fórmula de Euler, $|E|+2 = |V|+|R| \leq |V|+2|E|/3$, de donde se sigue el resultado. ∎

Ejemplo 5.18.- *El grafo completo K_5 no es plano.*

En efecto, como $|E| = 10 > 3(|V| - 2) = 9$, no se cumple el teorema anterior y K_5 no puede ser plano. ∎

Ejemplo 5.19.- *La condición $|E| \leq 3(|V| - 2)$ no garantiza que el grafo sea plano, como puede verse con el grafo bipartido $K_{3,3}$, que no es plano y cumple*

$$|E| = 9 < 3(|V| - 2) = 3(6 - 2) = 12.$$

Teorema 5.15 *Sea $G = (V, E)$ un grafo plano conexo con más de 3 vértices y tal que no contiene a ningún subgrafo isomorfo a K_3 (es decir, no contiene triángulos). Entonces*

$$|E| \leq 2(|V| - 2).$$

Demostración. Razonando como en el teorema anterior, sea M un mapa que representa a G. El grado de cada región R de M tiene que ser $\delta(R) \geq 4$, ya que si $\delta(R) = 3$, R sería un triángulo (K_3). Entonces, si $R_1, \ldots, R_n$ son las regiones de M,

$$2|E| = \delta(R_1) + \cdots + \delta(R_n) \geq 4|R| \Rightarrow |R| \leq |E|/2.$$

Además, por la fórmula de Euler, $|E|+2 = |V|+|R| \leq |V|+|E|/2$, de donde se sigue el resultado.

■

Ejemplo 5.20.- *El grafo bipartido $K_{3,3}$ no es plano.*

En primer lugar comprobamos que $K_{3,3}$ no contiene ningún triángulo, ya que no hay tres vértices que sean adyacentes dos a dos. Entonces, como $|E| = 9 > 2(|V| - 2) = 8$, no se cumple el teorema anterior y $K_{3,3}$ no puede ser plano. ■

Ejemplo 5.21.- *La condición $|E| \leq 2(|V| - 2)$ tampoco es suficiente para que el grafo sea plano, como se prueba con el grafo de Petersen.*

El grafo de Petersen, G_P, tiene como vértices los subconjuntos de dos elementos del conjunto $\mathbb{N}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tiene por tanto $C(5, 2) = 10$ vértices que denotamos $v_{1,2}$, $v_{1,3}$, …, $v_{4,5}$.

En el grafo de Petersen, dos vértices $v_{i,j}$ y $v_{k,\ell}$ están unidos por una arista si $\{i, j\} \cap \{k, \ell\} = \emptyset$. Así, por ejemplo, los vértices $v_{1,2}$ y $v_{4,5}$ están unidos por una arista, mientras que los vértices $v_{1,2}$ y $v_{1,3}$ no lo están.

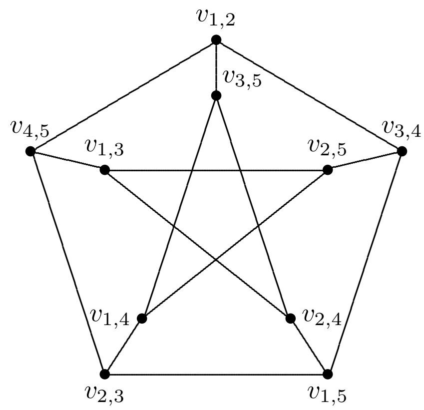


Figura 5.18: Grafo de Petersen.

Entre las características de G_P podemos destacar que es un grafo regular de grado 3, que dos vértices adyacentes no tienen vecinos en común (es decir, no hay ciclos de longitud tres) y que dos vértices no adyacentes tienen exactamente un vecino en común.

Además, como vemos, en el grafo de Petersen, $|V| = 10$ y $|E| = 15$, por lo que se cumple la condición $15 = |E| \leq 2(|V| - 2) = 16$. Sin embargo, todos los intentos en buscar un mapa nos conducen al fracaso. ■

A continuación veremos un resultado que justifica este fracaso. Pero antes necesitamos unos nuevos conceptos.

Definición 5.19.- *Dos grafos G_1 y G_2 se dice que son* homeomorfos *si G_2 se puede obtener de G_1 por la inserción o eliminación de vértices de grado 2.*

Una subdivisión elemental *de un grafo G es un nuevo grafo que se obtiene al insertar vértices de grado 2 en las aristas de G.*

Teorema 5.16.- (Teorema de Kuratowski) *Un grafo es plano si, y sólo si, no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.*

Un enunciado equivalente es el siguiente: Un grafo es plano si, y sólo si, no contiene ningún subgrafo que es una subdivisión elemental de K_5 o de $K_{3,3}$.

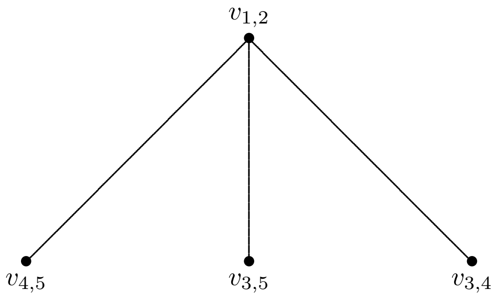
Demostración. La demostración rigurosa de este hecho se apoya en el teorema de la curva de Jordan[1] que, aunque geométricamente obvio, no es fácil de probar. ■

Aplicando el Teorema de Kuratowski, podemos concluir que el grafo de Petersen no es plano.

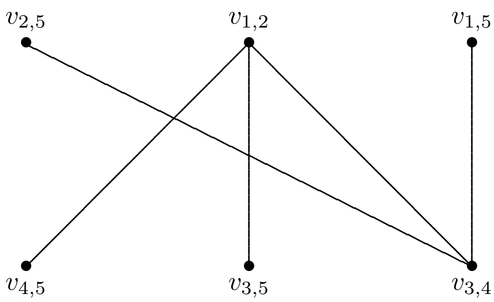
Ejemplo 5.22.- *El grafo de Petersen, G_P, no es plano.*

En primer lugar, observamos que no puede tener ninguna subdivisión de K_5 pues los vértices de K_5 tienen grado 4 y los de G_P tienen grado 3. Buscaremos, por tanto, alguna subdivisión de $K_{3,3}$.

Alguno de los seis vértices de $K_{3,3}$ debe estar en el pentágono exterior de G_P. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que es $v_{1,2}$ y lo colocamos en el centro de la parte de arriba de la posible subdivisión de $K_{3,3}$. Como $v_{1,2}$ está conectado con $v_{4,5}$, $v_{3,5}$ y $v_{3,4}$, estos tres vértices formarían la fila de abajo de la posible subdivisión de $K_{3,3}$. Tenemos entonces



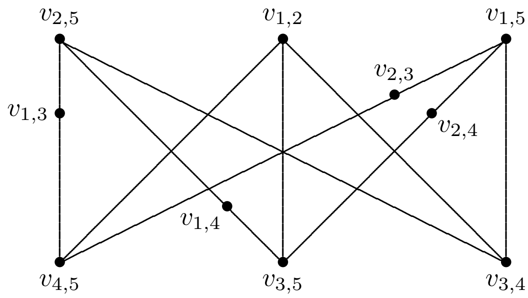
Consideremos ahora el vértice $v_{3,4}$. Además de $v_{1,2}$, es adyacente a $v_{1,5}$ y $v_{2,5}$. Podemos completar la fila de arriba con estos dos vértices, llegando a



Ahora tendríamos que conectar los vértices $v_{2,5}$ y $v_{4,5}$, $v_{2,5}$ y $v_{3,5}$, $v_{1,5}$ y $v_{3,5}$, $v_{1,5}$ y $v_{4,5}$ utilizando alguna de las aristas de G_P que todavía no hayamos empleado. Por ejemplo, podemos conectar $v_{2,5}$ y $v_{4,5}$ «pasando» por $v_{1,3}$, es decir, usando las aristas $v_{2,5}$-$v_{1,3}$ y $v_{1,3}$-$v_{4,5}$. De igual modo, podemos conectar $v_{2,5}$ y $v_{3,5}$ «pasando» por $v_{1,4}$, $v_{1,5}$ y $v_{3,5}$ «pasando» por $v_{1,3}$ y, finalmente, $v_{1,5}$ y $v_{4,5}$ «pasando» por $v_{2,3}$. Llegamos así al siguiente grafo, que resulta ser una subdivisión

[1]El teorema de la curva de Jordan establece que toda curva cerrada simple del plano divide a éste en dos componentes conexas disjuntas, que tienen a la curva como frontera común. Una de estas componentes está acotada (el interior de la curva) y la otra es no acotada y corresponde al exterior de la misma.

elemental de $K_{3,3}$, obtenida eliminando las aristas $v_{1,4}$-$v_{2,3}$ y $v_{1,3}$-$v_{2,4}$ del grafo de Petersen.



En consecuencia, hemos probado que el grafo de Petersen no es plano. ■

5.7. Coloración de grafos

Uno de los problemas más famosos de la historia de las Matemáticas es el *problema de los cuatro colores*: ¿Es posible colorear cualquier mapa[2] con cuatro colores diferentes de forma que no haya dos regiones con frontera común con el mismo color? Como un sencillo pasatiempos, el lector puede intentar colorear, usando sólo cuatro colores, el mapa de La Rioja que se muestra en la figura 5.19

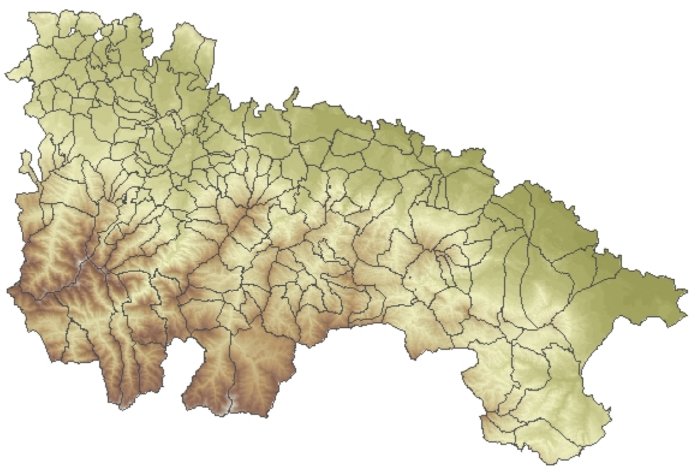


Figura 5.19: Mapa de La Rioja y sus términos municipales.

Aunque, a primera vista, el problema parece que no tiene nada que ver con las Matemáticas, veamos que admite una formulación en términos de grafos. En efecto, el problema puede traducirse a otro similar de grafos si representamos las regiones por vértices y decimos que dos vértices están unidos por una arista si las regiones que representan tienen frontera común. En este caso el problema se reduce a colorear los vértices de un grafo de manera que dos que sean adyacentes no tengan el mismo color. Esto se conoce como una *coloración* de un grafo.

Además, su demostración no ha resultado nada sencilla y han sido necesarios 125 años y el trabajo de muchos científicos para conseguirla. Así, desde que en 1850 un joven estudiante de leyes inglés, llamado Francis Guthrie, propusiera el problema a su hermano Frederick, hasta su demostración en 1976, muchos matemáticos de la talla de De Morgan, Hamilton o Cayley intentaron, sin éxito, encontrar una prueba.

La historia de este resultado está salpicada de anécdotas interesantes. A finales del siglo XIX el problema de los cuatro colores había adquirido gran fama entre la comunidad matemática. De hecho, Cayley lo propuso en 1878 en la London Mathematical Society como uno de los problemas a resolver. Poco tiempo más tarde, en 1879, A. B. Kempe publicó una demostración. Pero 11 años más tarde, P. J. Heawood encontró un error

[2]Se excluye el caso que un país tenga un enclave aislado dentro de otro. También se entiende que países que limitan sólo en un punto no tienen frontera común.

en la demostración de Kempe. Aunque siguió trabajando en el problema, no encontró una solución. Eso sí, su trabajo no fue en vano, pues logró probar que con 5 colores sí se puede colorear cualquier mapa. Como está claro que 3 colores no bastan para colorear un mapa, como se puede demostrar con el grafo de la figura 5.20, sólo quedaba por demostrar qué ocurría con 4 colores, ¿se podía o no?

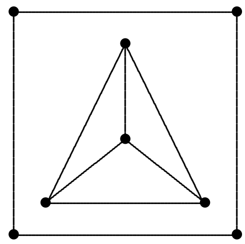


Figura 5.20: Ejemplo de un mapa que no se puede pintar con 3 colores.

Tuvo que pasar mucho tiempo hasta que en 1976, K. Appel y W. Haken demostraron que con 4 colores se podía colorear cualquier mapa. Aún así, muchos matemáticos se mantuvieron escépticos ante esta demostración[3], ya que ésta se apoyaba en un programa de ordenador que iba analizando un número finito, aunque muy elevado, de mapas a los que se había reducido el caso general. Aunque la estructura del programa era correcta, muchos desconfiaban de los cálculos realizados por ordenador.

Finalmente, en 1996, N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour y R. Thomas publicaron una nueva prueba sin los inconvenientes de la demostración de Appel y Haken.

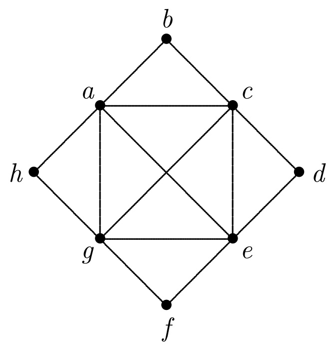
Además del problema de los cuatro colores, la coloración de grafos tiene múltiples aplicaciones en el campo de la programación o en el de la investigación operativa. Veamos a continación los principales conceptos y resultados dentro de este campo.

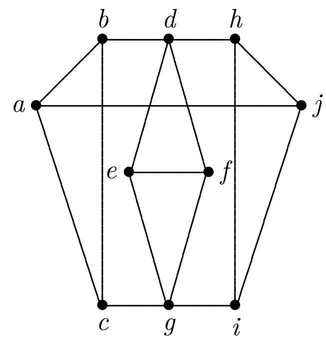
Definición 5.20.- *Una* coloración de vértices *de un grafo $G = (V, E)$ es una función $c : V \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $c(x) \neq c(y)$ siempre que $\{x, y\} \in E$. El* número cromático *de G, que denotaremos por $\chi(G)$, se define como el menor entero k tal que existe una coloración de vértices de G con k colores. En otras palabras, $\chi(G) = k$ si, y sólo si, existe una función de coloración c de V en $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ y k es el menor entero con esa propiedad.*

Ejemplo 5.23.- *El número cromático de los siguientes grafos es el siguiente:*

- Si G es un grafo plano, $\chi(G) \leq 4$ (Teorema de los cuatro colores).
- Si G es un grafo bipartido, $\chi(G) = 2$.
- Sea K_n el grafo completo de n vértices. Entonces, $\chi(K_n) = n$.
- Sea C_n un ciclo de n vértices. Entonces, $\chi(C_n) = 2$ si n es par y $\chi(C_n) = 3$ si n es impar.
- Sea W_n una rueda de $n + 1$ vértices. Entonces, $\chi(W_n) = 3$ si $n \geq 4$ es par y $\chi(W_n) = 4$ si $n \geq 3$ es impar. ■

Ejemplo 5.24.- *Calcula el número cromático de los siguientes grafos:*

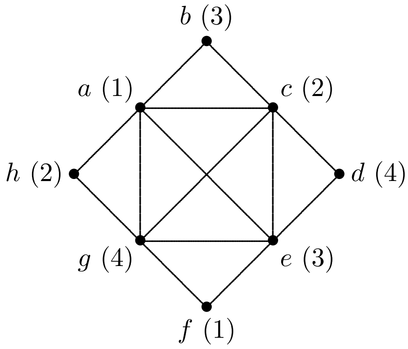




[3]La idea de la demostración es la misma que la dada por Kempe, aunque solventando el error cometido por éste.

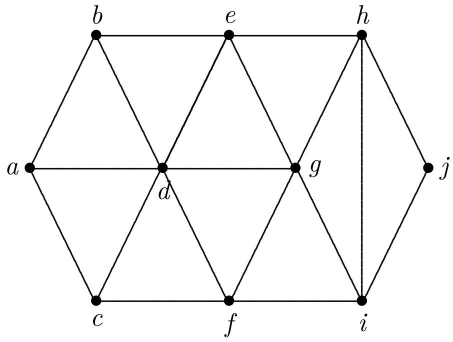
Como consejo para intentar construir una coloración con k colores, se puede intentar buscar un grafo completo K_n dentro del grafo que nos den.

Así, por ejemplo, en el primer caso, como los vértices a, c, e y g forman el grafo K_4 buscamos una coloración de 4 colores. En este caso, con 4 colores basta. A continuación, se da una posible coloración. Se ha etiquetado a cada vértice con un número que representa un color distinto.



En el segundo caso, la coloración debe incluir como mínimo 3 colores ya que los vértices d, e y f forman el grafo completo K_3. Si intentamos buscar una coloración con 3 colores, podemos asignar a d el color 1, a e el 2 y a f el 3. Entonces, por fuerza, g debe tener el color 1. Además, para h y i quedan los colores 2 y 3, por lo que j está obligado a tener el color 1. Por el otro lado, b y c pueden tener los colores 2 y 3, por lo que a está obligado a tener el color 1. Pero esto es imposible ya que a y j son adyacentes y tienen el mismo color. En consecuencia, no existe una coloración con sólo tres colores y el número cromático del segundo grafo es 4 (es muy fácil encontrar una 4-coloración). ∎

Ejemplo 5.25.- *En una universidad hay 10 comisiones que se reúnen 1 hora al día, en horario de 9 a 13 horas. Algunas comisiones tienen miembros comunes, luego no se pueden reunir simultáneamente. El siguiente grafo muestra un modelo en el que los vértices son las comisiones y las aristas indican si hay miembros comunes entre dos comisiones.*



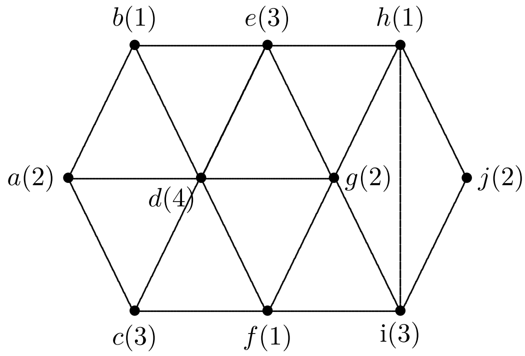
Dos comisiones se pueden reunir a la vez si no son adyacentes. Por ejemplo, a y j se pueden reunir a la misma hora sin problemas, pero a y b no, pues tienen miembros comunes. ¿Se puede encontrar un horario compatible para todas las comisiones? ¿Cuál es la menor franja horaria que se necesita?

Se trata de un problema de coloración de grafos, en el que los «colores» serían las horas de reunión de las comisiones. Así, por ejemplo, si etiquetamos las franjas horarias de 9 a 10, de 10 a 11, de 11 a 12 y de 12 a 13 con los números 1, 2, 3 y 4 respectivamente, podemos encontrar la siguiente 4-coloración: Como los vértices a, b, c, d, e, f y g forman la rueda W_6, sabemos que hacen falta 3 colores para colorear esa parte del grafo. Por ejemplo, $a \to 1$, $b \to 2$, $d \to 3$, $c \to 2$, $e \to 1$, $g \to 2$, $f \to 1$. A partir de aquí, si a h le asignamos el color 3, el vértice i tiene que tomar un nuevo color, pues es adyacente a vértices con colores 1, 2 y 3. Le asignamos a i el nuevo color, 4, y entonces j puede colorearse con los colores 1 ó 2. Si asignamos a j el color 1, llegamos al siguiente horario:

- Las comisiones a, e, f y j se reúnen de 9 a 10 de la mañana.

- Las comisiones b, c y g se reúnen de 10 a 11.
- Las comisiones d y h se reúnen de 11 a 12.
- La comisión i se reúne de 12 a 13.

Esta coloración no es única. Se pueden encontrar muchas otras. El siguiente grafo nos muestra otra de ellas.



■

Definición 5.21.- *El* polinomio cromático P_G *de un grafo* G *es un polinomio tal que, para cada entero positivo* k*,* $P_G(k)$ *indica el número de* k*-coloraciones diferentes de* G*.*

El siguiente resultado nos permite encontrar el número cromático $\chi(G)$ de un grafo con la ayuda del polinomio cromático.

Teorema 5.17.- *El número cromático* $\chi(G)$ *de un grafo es el menor entero positivo,* k*, que hace que*

$$P_G(k) > 0.$$

En los siguientes ejemplos mostramos cómo encontrar el número cromático $\chi(G)$ a partir del polinomio cromático para algunos casos sencillos.

Ejemplo 5.26.- *Calcula el polinomio cromático y el número cromático de* D_n*, el grafo degenerado de* n *vértices, formado por* n *puntos aislados.*

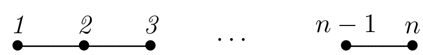
Si tenemos k posibles colores para colorear el grafo,

podemos asignar cada uno de los k colores a cada vértice. Por lo tanto,

$$P_{D_n}(k) = k \times k \times \cdots \times k = k^n.$$

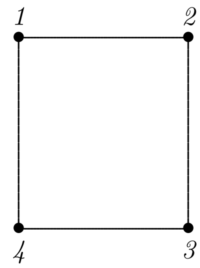
Como $P_{D_n}(0) = 0$ y $P_{D_n}(1) = 1$, se tiene que $\chi(D_n) = 1$. En este caso, era evidente que $\chi(D_n) = 1$, ya que como los n vértices están aislados, un solo color basta para colorearlos sin que dos adyacentes tengan el mismo color. ■

Ejemplo 5.27.- *Calcula el polinomio cromático y el número cromático de* L_n*, el grafo lineal de* n *vértices:*



Si tenemos k posibles colores para colorear el grafo, al primer vértice le podemos asignar cualquiera de los k colores. Sin embargo, al segundo ya sólo le podríamos asignar $k - 1$ colores (cualquier color, menos el asignado al primer vértice). Por el mismo razonamiento a los vértices $2, 3, \ldots, n$, se le pueden asignar $k - 1$ colores y, por lo tanto, $P_{L_n}(k) = k(k-1)^{n-1}$. Como $P_{L_n}(0) = P_{L_n}(1) = 0$ y $P_{L_n}(2) = 2$, se tiene que $\chi(L_n) = 2$. ■

Ejemplo 5.28.- *Calcula el polinomio cromático y el número cromático de C_4, el ciclo de 4 vértices.*



Si tenemos k posibles colores para colorear el grafo, al primer vértice le podemos asignar cualquiera de los k colores. Sin embargo, al segundo ya sólo le podríamos asignar $k-1$ colores. De igual modo, al tercer vértice le podríamos asignar $k-1$ colores (cualquier color, menos el asignado al vértice 2). Ahora bien, si el color asignado al tercer vértice coincide con el asignado al primero, nos quedan $k-1$ colores para el cuarto vértice. Pero si el color asignado al tercer vértice es distinto al asignado al primero (podemos elegir entre $k-2$ colores), nos quedan $k-2$ colores para el cuarto vértice. En definitiva,

$$P_{C_4}(k) = k(k-1)\big(1 \times (k-1) + (k-2)(k-2)\big) = k(k-1)(k^2-3k+3).$$

Como $P_{C_4}(0) = P_{C_4}(1) = 0$ y $P_{C_4}(2) = 2$, se tiene que $\chi(C_4) = 2$. ■

Teorema 5.18.- (Relación de recurrencia para el polinomio cromático) *Sean x e y dos vértices no adyacentes de un grafo conexo $G = (V, E)$. Definimos G^+_{xy} como el grafo que se obtiene al añadir la arista $\{x, y\}$ a G. Definimos G^-_{xy} como el grafo que se obtiene al hacer coincidir x e y en un sólo vértice que es adyacente a todos los vértices que eran adyacentes a x o a y en G. Entonces,*

$$P_G(k) = P_{G^+_{xy}}(k) + P_{G^-_{xy}}(k).$$

Demostración. La demostración se basa en la siguiente observación: en G^+_{xy} podemos hacer todas las coloraciones de G donde los vértices x e y reciben distinto color. En G^-_{xy} podemos hacer todas las coloraciones de G donde los vértices x e y reciben el mismo color. La suma de ambas nos da las posibles coloraciones del grafo G. ■

Una formulación equivalente del teorema anterior es la siguiente.

Corolario 5.19.- (Descomposición del polinomio cromático) *Si x e y son dos vértices adyacentes de un grafo conexo $H = (V, E)$ y denotamos por H^1_{xy} al grafo que se obtiene al eliminar la arista $\{x, y\}$ en H, H^2_{xy} al grafo que se obtiene al hacer coincidir x e y en un sólo vértice que es adyacente a todos los vértices que eran adyacentes a x o a y en H. Entonces,*

$$P_H(k) = P_{H^1_{xy}}(k) - P_{H^2_{xy}}(k).$$

Demostración. No hay más que intercambiar los papeles de $H^1_{xy} = G$, $H = G^+_{xy}$ y $H^2_{xy} = G^-_{xy}$ en el teorema anterior. ■

Los resultados anteriores hacen referencia a grafos conexos. Si $G = (V, E)$ es un grafo inconexo y $C_1, C_2, \ldots C_m$ son sus componentes conexas, se tiene que

$$P_G(k) = P_{C_1}(k)P_{C_2}(k)\cdots P_{C_m}(k).$$

Ejemplo 5.29.- *Prueba que el polinomio cromático de C_n, el ciclo de n vértices, es*

$$P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1), \quad n \geq 2.$$

Sea L_n el grafo lineal de n vértices. Sabemos, por el Ejemplo 5.27, que $P_{L_n}(k) = k(k-1)^n$.

Notemos que si añadimos la arista $\{1, n\}$ a L_n tenemos el ciclo C_n. Por otra parte, si fusionamos los vértices 1 y n en L_n nos queda el ciclo C_{n-1}. Teniendo en cuenta la relación de recurrencia para el polinomio cromático, tenemos que

$$P_{C_n}(k) = P_{L_n}(k) - P_{C_{n-1}}(k).$$

Para un k fijo, si denotamos $x_n = P_{C_n}(k)$, llegamos a la siguiente relación de recurrencia:

$$x_n = k(k-1)^n - x_{n-1}.$$

La solución general de dicha recurrencia es $x_n = (k-1)^n + (-1)^n A$, siendo A un valor que no depende de n. Puesto que $x_2 = k(k-1)$, se deduce que $A = k-1$ y, por tanto,

$$x_n = P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1). \qquad \blacksquare$$

En general, hallar el número cromático de un grafo es un problema difícil y suponiendo que éste fuera k, para demostrarlo rigurosamente es necesario probar que el grafo no puede ser coloreado con $k-1$ colores. Probar esto es similar a probar que un grafo no tiene ciclos hamiltonianos o que no es isomorfo a un cierto grafo en particular. En cualquier caso, se trata de mostrar que cualquier coloración con $k-1$ colores fuerza a que existan dos vértices adyacentes con el mismo color. La coloración de grafos pertenece a una clase de problemas conocidos como *NP-completos*. Un problema se dice NP-completo si la complejidad computacional necesaria para resolverlo no es polinómica.

Dada la dificultad del problema, existen algoritmos más o menos eficientes que, cuando menos, permiten una coloración de vértices que usan un número «razonable» de colores. Uno de esos algoritmos, el algoritmo de Welsh y Powell, es un *algoritmo voraz* que consiste en asignar colores a los vértices ordenadamente, de forma que cada vértice reciba el primer color que no haya sido asignado a ninguno de sus adyacentes. En cada paso se toma la mejor opción sin preocuparse de si esa opción creará problemas más adelante. Se puede probar que este algoritmo puede llegar a usar hasta $d+1$ colores, donde d es el máximo de los grados de los vértices del grafo G. La solución que nos proporcione este algoritmo no tiene por qué ser $\chi(G)$.

Nótese que con una ordenación adecuada de los vértices, el algoritmo voraz nos daría el número cromático del grafo. Sin embargo, existen $n!$ ordenaciones diferentes de los vértices y, si n es grande, la exploración de todas las ordenaciones es físicamente imposible.

No obstante, existen algunos resultados sobre coloración para ciertos tipos particulares de grafos. Enunciamos a continuación algunos de ellos.

Teorema 5.20.- *Los vértices de la triangulación de un polígono pueden ser 3-coloreados.*

Teorema 5.21.- *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) G *es un grafo bipartido.*

ii) $\chi(G) = 2$.

iii) G *no contiene ciclos de longitud impar.*

Teorema 5.22.- (Teorema de Brook) *Sea G un grafo, con $G \neq C_{2n+1}$ (G no es un ciclo de longitud impar) y $G \neq K_n$ (G no es un grafo completo). Entonces $\chi(G) \leq d$ donde d es el máximo de los grados de los vértices de G.*

Notemos que, en las excepciones del teorema de Brook, se tiene $\chi(G) > d$. Así, por ejemplo, en los ciclos impares (grafos regulares de grado 2 formando un ciclo de longitud impar), se tiene $\chi(C_{2n+1}) = 3 > d = 2$. Para los grafos completos K_n, se tiene $\chi(K_n) = n$ que es mayor que el grado de cada vértice $d = n-1$.

El teorema de Brook proporciona una cota superior para el número cromático de un grafo G, que en la mayoría de los casos se antoja pobre. En realidad una cota más natural tendría que ver con el mayor subgrafo completo contenido en G.

5.8. Grafos bipartidos y emparejamientos

En una amplia gama de problemas combinatorios nos encontramos con el problema de contar los elementos de un subconjunto de un conjunto producto $X \times Y$ que cumplen una cierta relación. Dar una relación R entre dos conjuntos X e Y es equivalente a dar un grafo bipartido. Así, dados $x \in X$, $y \in Y$, se dice que x está relacionado con y, $x\,R\,y$, si y sólo si $\{x, y\}$ es una arista del grafo. Es evidente que el grafo así definido es bipartido, pues no hay relaciones entre elementos de un mismo conjunto. Denotaremos este grafo por $G = (X \cup Y, E)$.

Aplicando los principios básicos de conteo nos encontramos con que si $G = (X \cup Y, E)$ es un grafo bipartido, entonces

$$\sum_{x \in X} \delta(x) = \sum_{y \in Y} \delta(y) = |E|.$$

Como consecuencia de este resultado, si G es regular entonces $|X| = |Y|$. Además, si $A \subseteq X$ con $|A| = n$, existe $B \subseteq Y$ con $|B| \leq n$ tal que para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $\{a, b\} \in E$.

Estos resultados básicos sobre grafos bipartidos son la antesala de otros más interesantes referentes a los denominados *problemas de emparejamiento*. Supongamos que tenemos un conjunto de personas X y un conjunto de trabajos Y. Cada persona está cualificada para realizar algunos de los trabajos. Una cuestión importante es cómo asignar personas a los trabajos de forma que el máximo número de ellas consiga un trabajo para el que está cualificada.

Definición 5.22.- *Un* emparejamiento *en un grafo bipartido $G = (X \cup Y, E)$ es un subconjunto M de E con la propiedad de que dos aristas de M nunca tienen un vértice en común. Diremos que M es un* emparejamiento máximo *si ningún otro emparejamiento tiene cardinal mayor. Si $|M| = |X|$ diremos que M es un* emparejamiento completo*.*

Nótese que un emparejamiento completo es máximo, pero que uno máximo no tiene por qué ser completo.

El primer paso en el estudio de los emparejamientos es decidir cuándo es posible que exista un emparejamiento completo. Para ello parece lógico considerar, para un subconjunto de vértices A de X, el siguiente conjunto

$$T(A) = \{y \in Y \mid \{x, y\} \in E \text{ para algún}\, x \in A\}.$$

Si $|T(A)| < |A|$ no podrán existir emparejamientos completos, por el principio del palomar. Por tanto, si existe un emparejamiento completo, entonces $|T(A)| \geq |A|$, para todo $A \subseteq X$. Esto se conoce como *condición de Hall*. Esta condición además de necesaria es también suficiente, es decir, el grafo bipartido $G = (X \cup Y, E)$ admite un emparejamiento completo si, y sólo si, se verifica la condición de Hall.

En el caso de que no exista un emparejamiento completo, nos preguntaremos por el tamaño del emparejamiento máximo. Para ello, llamemos *deficiencia* de un grafo bipartido $G(X \cup Y, E)$ a la cantidad

$$d = \max_{A \subseteq X} \{|A| - |T(A)|\}.$$

Nótese que $d \geq 0$ pues $A = \emptyset \subseteq X$ y $|\emptyset| - |T(\emptyset)| = 0$.

Se tiene que el tamaño de un emparejamiento máximo es $|M| = |X| - d$. Si se cumple la condición de Hall, entonces $d = 0$ y el emparejamiento es completo.

El último resultado nos da el tamaño del emparejamiento máximo, pero no nos dice cómo construirlo. En este sentido, el concepto de *camino alternado* nos proporcionará un método de construcción de un emparejamiento máximo.

Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartido y M un emparejamiento de G. Diremos que el camino

$$x_0, y_1, x_1, y_2, x_2, \ldots, x_{k-1}, y_k$$

es un camino alternado (para M) si las aristas $\{y_i, x_i\}$ son de M, las aristas $\{x_{i-1}, y_i\}$ no son de M $(1 \leq i \leq k)$, y x_0 e y_k no pertenecen a ninguna arista de M.

Obsérvese que en un camino alternado el número de aristas que pertenecen a M es una unidad inferior al de aristas que no pertenecen a M. Por tanto, si intercambiamos las aristas (en el sentido de pertenencia a M) podemos conseguir un nuevo emparejamiento M' tal que $|M'| = |M| + 1$.

Sin embargo, el método del camino alternado no sería útil sin el siguiente resultado: Si un emparejamiento no es máximo, entonces posee un camino alternado.

Las aplicaciones de los problemas de emparejamiento son múltiples y se usan, sobre todo, en problemas de optimización, como puede ser el de asignar de manera eficiente un grupo de tareas para que sean ejecutadas por un grupo de trabajadores, cada uno de los cuales está cualificado para realizar algunas de dichas tareas. En los siguientes ejemplos se muestra cómo utilizar la teoría de grafos en este contexto.

Ejemplo 5.30.- *Los profesores A, B, C, D y E pertenecen a diferentes comisiones: biblioteca (1), investigación (2), docencia (3), nuevas tecnologías (4) y relaciones con la empresa (5). El profesor A pertenece a las comisiones 1 y 5; el B a 1 y 4; el C a 2; el D a 3 y 4; el E a 1 y 5. Si hay que seleccionar a 5 profesores, uno por comisión, para formar parte de la Comisión Académica, ¿es posible hacerlo?*

El problema se puede plantear en términos de grafos. Tenemos dos conjuntos de vértices; por un lado los que representan a los profesores y, por otro, los que representan a las comisiones. Las aristas indican la pertenencia de un profesor a una comisión. Así, se obtiene el grafo de la figura5.21

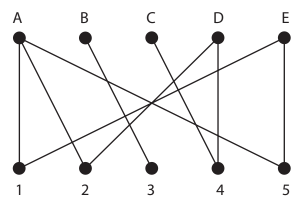


Figura 5.21: Grafo correspondiente al ejemplo 5.30.

Para seleccionar a los cinco profesores, uno por comisión, lo que hay que hacer es un emparejamiento completo. Como el grafo es pequeño, se puede hacer de manera sencilla pero, para ilustrar la técnica del camino alternado, supondremos que hemos intentado hacer la selección y que no hemos tenido éxito. Supongamos que dicha selección es la que está con aristas a trazos en la parte izquierda de la figura 5.22, es decir, hemos seleccionado al profesor A de la comisión 1, al B de la comisión 3, al D de la 4 y al E de la 5. Como se ve, el emparejamiento no es máximo, ya que no hemos podido seleccionar a ningún profesor de la comisión 2. Sin embargo existe un camino alternado, como el que aparece en la parte derecha de la figura. Hemos encontrado un camino, que empezando por un vértice que no está en el emparejamiento inicial, va alternado aristas que están y no están en el emparejamiento, acabando en un vértice no emparejado.

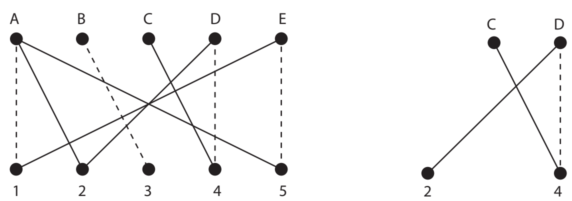


Figura 5.22: Emparejamiento inicial y camino alternado.

Si intercambiamos el papel de las aristas en el camino alternado, es decir, las continuas pasan a ser discontinuas y las discontinuas continuas, habremos logrado un emparejemiento nuevo. De hecho, la pareja D-4, pasa a desaparecer para dar lugar a las parejas C-4, D-2, completando de esta manera el emparejamiento, pues las parejas A-1, B-3 y E-5 no se ven modificadas. ■

Ejemplo 5.31 *¿Es posible recubrir el conjunto de cuadrados de la figura adjunta con fichas de dominó?*

Podemos reducir el problema a encontrar un emparejamiento completo. Puesto que una ficha de dominó ocupa dos casillas, éstas se pueden dividir en dos grupos, como si de un tablero de ajedrez se tratara. En este caso usaremos números y letras, en vez de los colores blanco y negro. Una ficha siempre tapará dos casillas, una de las cuales es un número y la otra una letra. De

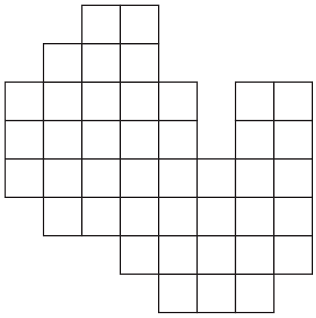


Figura 5.23: Tablero para recubrir con fichas de dominó.

este modo podemos formar un grafo bipartido con dos conjuntos de vértices, números y letras, donde las aristas indican que una ficha de dominó puede cubrir el par de casillas con la letra y el número correspondiente. De este modo tenemos la partición del tablero en números y letras, con el consiguiente grafo bipartido asociado que se muestra en la siguiente figura.

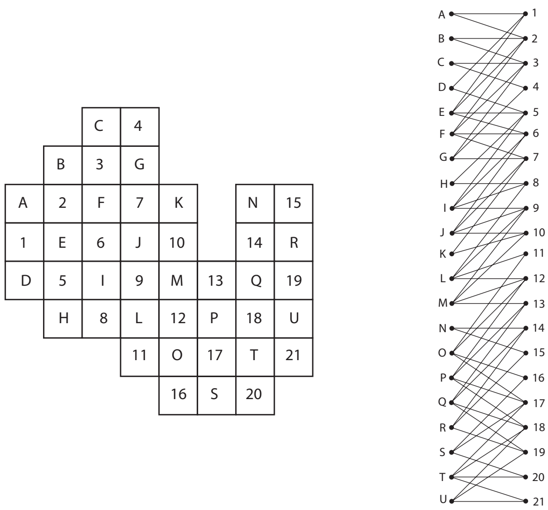


Figura 5.24: Partición del tablero de la figura anterior en números y letras junto con el grafo bipartido asociado.

Puede verse que si consideramos el conjunto de 11 vértices

$$\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\},$$

entonces el correspondiente conjunto de vértices numéricos que tienen aristas con alguno de ellos es $T(\mathcal{A}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Como $|\mathcal{A}| = 11 > |T(\mathcal{A})| = 10$, no se verifica la condición de Hall y no puede haber un emparejamiento completo, lo que significa que no podemos recubrir la figura con fichas de dominó. ■

5.9. Problemas resueltos

1. Considera el juego del dominó convencional: 28 fichas formadas por las puntuaciones $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Responde, de forma razonada, a las siguientes cuestiones:

   a) Dibuja un grafo en el que los vértices son las puntuaciones y las aristas son las fichas, e indicar de qué tipo es.

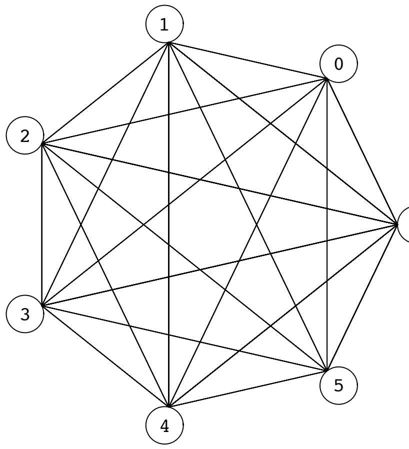


Figura 5.25: Grafo asociado a las fichas del dominó.

b) ¿Es posible concatenar todas las fichas? ¿Coinciden las puntuaciones de los extremos de la cadena?
c) Si eliminamos una ficha cualquiera, ¿puede concatenarse el resto?
d) Si añadimos al juego inicial ocho fichas más, con puntuaciones 0–7 a 7–7, ¿es posible concatenarlas todas? Si no es así, ¿cuál es el número mínimo de fichas que deberíamos eliminar para conseguirlo?

Solución. a) Se trata de un pseudografo. En concreto, se trata del grafo completo K_7 con un lazo en cada vértice, como el de la figura 5.25.

Podemos transformarlo en un grafo simple introduciendo un nuevo vértice de grado 2 en cada lazo. Entonces, los vértices etiquetados con $0, 1, \ldots, 6$ pasan a tener grado 8.

b) Observemos que el grafo es conexo y $\delta(v_i) = 8$ si $v_i = 0, 1, \ldots, 6$ y $\delta(u_i) = 2$ si u_i es el nuevo vértice introducido en el lazo i-ésimo. Entonces, por el Teorema de Euler, es un grafo euleriano y podemos recorrerlo pasando una sóla vez por cada una de las aristas o, equivalentemente, podemos concatenar todas las fichas del dominó. Además, como se trata de un circuito, empezamos y acabamos con la misma puntuación.

c) Si eliminamos una ficha, tenemos que distinguir que se trate de una ficha doble o no. En el primer caso, seguimos teniendo todos los vértice de grado par (aparece ahora un vértice de grado 6 en el lugar correspondiente a la ficha doble eliminada), luego se sigue obteniendo un circuito euleriano. En el segundo caso, aparecen dos vértices con grado impar. Entonces, se puede obtener un recorrido euleriano empezando en uno de los vértices de grado impar y acabando en el otro.

d) Añadiendo 8 fichas más, pasaríamos a tener un grafo con 8 vértices de grado 9, por lo tanto no se puede encontrar un circuito euleriano ni tampoco un recorrido euleriano.

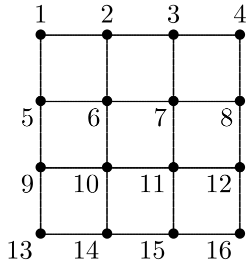
Para obtener un circuito euleriano, tendríamos que conseguir que todos los vértices tengan grado par. Para ello habría que quitar 4 fichas no dobles. Por ejemplo, si quitamos las fichas (aristas) $\{0, 1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5\}$ y $\{6, 7\}$, todos los vértices pasan a tener grado 8 y el grafo resultante es euleriano.

Para encontrar un recorrido euleriano, basta con quitar 3 fichas no dobles. Por ejemplo, si quitamos las fichas (aristas) $\{0, 1\}$, $\{2, 3\}$ y $\{4, 5\}$, los vértices $0, 1, 2, 3, 4, 5$ pasan a tener grado 8 y los vértices 6 y 7 siguen teniendo grado 9. El recorrido debería empezar en el vértice 6 y acabar en el 7 o viceversa. ■

2. Tenemos una clase de 16 estudiantes dispuestos en pupitres formando un cuadrado 4×4. El profesor quiere alterar las posiciones de los estudiantes moviendo a todos y cada uno de ellos a un pupitre adyacente (delante, detrás, derecha o izquierda). Expresa el problema en términos de grafos y ciclos hamiltonianos y responder a las siguientes preguntas: ¿Puede conseguir el profesor su propósito? ¿Podría conseguirlo en una clase con 9 estudiantes dispuestos en un cuadrado 3×3?

Solución. El problema se puede plantear como un grafo donde los vértices son los estudiantes y donde existe una arista entre dos vértices si los correspondientes estudiantes están sentados uno al lado del otro (ya sea a la izquierda, a la derecha, delante o detrás). La distribución inicial y el grafo al que da lugar son las siguientes:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

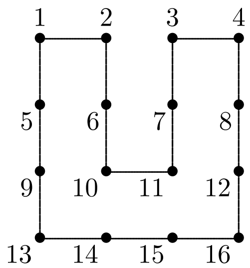


Obtener la nueva distribución que pretende el profesor es equivalente a encontrar un ciclo hamiltoniano dentro de este grafo. Al encontrar un ciclo hamiltoniano lo que hacemos es mover a cada estudiante al lugar que ocupaba el siguiente en el orden dado por el ciclo.

Hay varias maneras de encontrar un ciclo hamiltoniano. En primer lugar, tenemos que considerar todas las aristas correspondientes a los vértices de grado 2 (en este caso, las cuatro esquinas). En segundo lugar, observamos que no podemos recorrer todo el perímetro exterior del grafo, pues aislaríamos los vértices interiores. Así que en algún momento tenemos que conectar uno de los vértices exteriores con uno del interior.

Supongamos que elegimos la arista $\{2, 6\}$. Esto condiciona los siguientes pasos, ya que no podemos elegir la arista $\{2, 3\}$. Por tanto, estamos obligados a elegir la arista $\{3, 7\}$. No podemos tomar las aristas $\{5, 6\}$ ni $\{7, 8\}$, pues se formarían ciclos que no contienen a todos los vértices. Ahora, hay que incluir las aristas $\{5, 9\}$ y $\{8, 12\}$ y excluir la $\{9, 10\}$ y la $\{11, 12\}$.

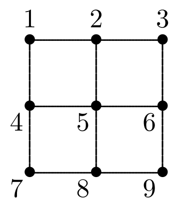
Llegados a este punto, podemos tomar de nuevo diferentes opciones. Si, por ejemplo, elegimos la arista $\{14, 15\}$, el resto se deduce en consecuencia. Así, como no se pueden tomar $\{10, 14\}$ ni $\{11, 15\}$, hay que considerar $\{6, 10\}$, $\{10, 11\}$ y $\{7, 11\}$ y descartar $\{6, 7\}$. En los gráficos siguientes se muestran el ciclo hamiltoniano que hemos obtenido con este procedimiento y la correspondiente distribución para los estudiantes que se deduce de él.



5	1	7	3
9	2	11	4
13	6	10	8
14	15	16	2

Observemos que no es el único ya que, si en las dos ocasiones donde hemos podido elegir, consideramos otra opción, podemos llegar a otro ciclo hamiltoniano.

Para el caso de 9 estudiantes en una distribución 3×3, no sería posible reordenarlos como quiere el profesor, ya que no existe un ciclo hamiltoniano asociado al siguiente grafo:



$\blacksquare$

3. Los esquemas de la figura 5.26 representan dos propuestas para las plantas de ampliación de un museo a las que se podrá acceder por un ascensor colocado en una de las quince salas.

   a) En cada uno de los casos, plantea y resuelve, en términos de grafos, si es posible encontrar un recorrido que empezando en una sala (donde se coloque el ascensor) recorra todo el resto de salas,

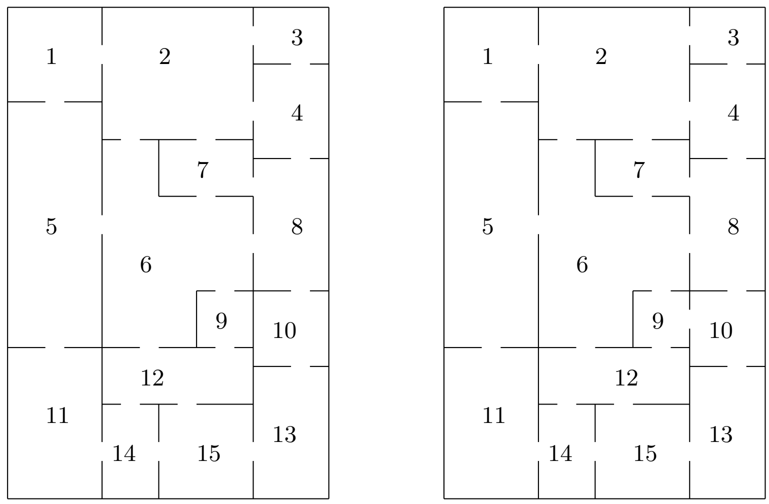


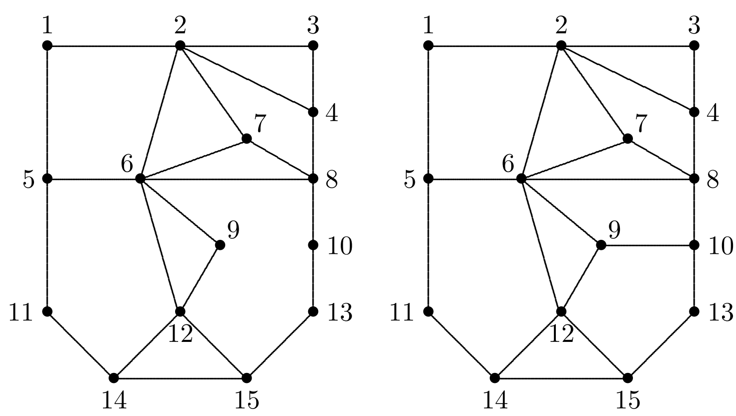
Figura 5.26: Mapas de las plantas de ampliación de un museo.

visitando una sóla vez cada sala y volviendo al punto de partida. Determina si existe un recorrido único o existen varios recorridos. Analiza también el caso en el que se puedan poner dos ascensores en salas diferentes, uno de entrada y otro de salida.

b) Al terminar la jornada, un conserje tiene que cerrar todas las puertas de la planta. Encuentra, si existe, un recorrido que permita al conserje cerrar todas las puertas pasando una sóla vez por cada puerta.

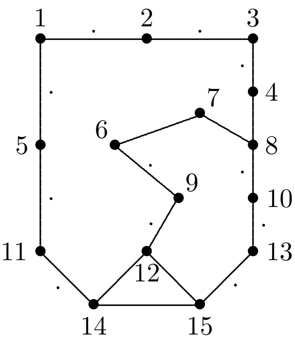
Solución. Podemos plantear el problema en términos de grafos haciendo corresponder los vértices a las salas y las aristas a las puertas. Así, dos vértices están conectados si existe una puerta que une las salas correspondientes.

Los planos de la figura 5.26 dan lugar a los siguientes grafos:



a) Encontrar un recorrido que recorra todas las salas una sóla vez, empezando y acabando en la misma sala, es encontrar un ciclo que pase por todos los vértices una sóla vez, es decir buscar un ciclo hamiltoniano.

En el primer caso, si marcamos con un punto todas las aristas correspondientes a vértices de grado 2 y eliminamos las aristas sobrantes, llegamos a la situación planteada en el grafo siguiente. Se observan entonces varios hechos que impiden que se pueda encontrar un ciclo hamiltoniano. Por ejemplo, los vértices 4 y 7 pasan a tener grado 2, lo cual obliga a considerar las aristas 4–8 y 7–8, por lo que el vértice 8 pasaría a tener grado 3, lo cual es imposible. En consecuencia, no existe un ciclo hamiltoniano.



Sin embargo a partir de la estructura anterior, se pueden encontrar varios recorridos hamiltonianos (empezando en una sala y acabando en otra diferente).

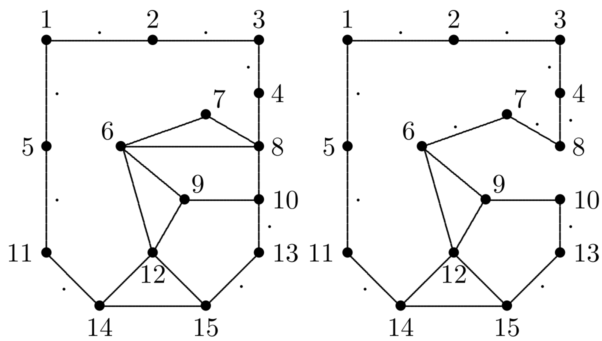
Por ejemplo, si decidimos introducir la arista 4–8, entonces 7 queda con grado 1, luego será el origen o final del recorrido. Además, no podemos introducir la arista 14–15 pues esto aislaría las salas 6, 7, 9 y 12. Tenemos dos posibilidades, introducir las aristas 12–15 ó 12–14, que dan lugar a los recorridos 1 y 2 de la tabla 3 de la tabla 3.

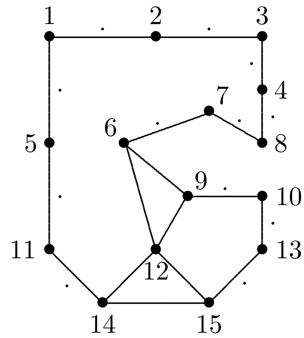
Pero si no introducimos la arista 4–8, entonces $\delta(4) = 1$ y 4 pasa a ser el inicio o final del recorrido. A partir de 4, la secuencia $\{4, 3, 2, 1, 5, 11, 14\}$ es fija. Entonces aparecen tres bifurcaciones, dando lugar a los recorridos 3, 4 y 5.

Tabla 5.2: Recorridos hamiltonianos para el primer mapa de la figura 5.26.

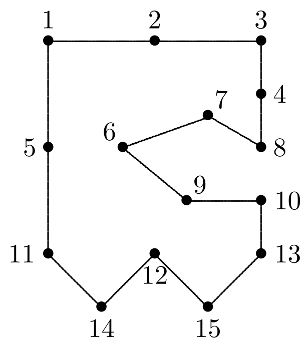
Recorrido 1	$\{14, 11, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 10, 13, 15, 12, 9, 6, 7\}$
Recorrido 2	$\{15, 13, 10, 8, 4, 3, 2, 1, 5, 11, 14, 12, 9, 6, 7\}$
Recorrido 3	$\{4, 3, 2, 1, 5, 11, 14, 12, 9, 6, 7, 8, 10, 13, 15\}$
Recorrido 4	$\{4, 3, 2, 1, 5, 11, 14, 15, 12, 9, 6, 7, 8, 10, 13\}$
Recorrido 5	$\{4, 3, 2, 1, 5, 11, 14, 15, 13, 10, 8, 7, 6, 9, 12\}$

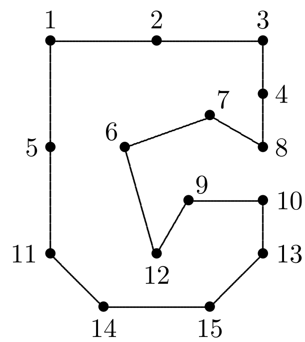
En el segundo caso, si marcamos con un punto todas las aristas correspondientes a vértices de grado 2 y eliminamos las aristas sobrantes, llegamos a la primera situación. Aparecen ahora nuevos vértices con grado 2, luego hay que incorporar las aristas correspondientes y eliminar las sobrantes, llegando al segundo grafo. Pero ahora es 10 quien pasa a tener grado 2, luego debemos incluir la arista 9–10 y llegamos al tercer grafo.





Tenemos ahora dos opciones, introducir la arista 6–9 o la arista 9–12. En cada uno de los casos se llega a los siguientes ciclos hamiltonianos:





b) El recorrido del conserje para cerrar todas las puertas es equivalente a encontrar un circuito euleriano. En ambos casos, se ve que esto no es posible ya que hay varios vértices de grado impar. Por ejemplo, $\delta(4) = \delta(5) = \delta(7) = \delta(14) = \delta(15) = 3$. ■

4. Prueba que si M es un mapa conexo y 3-regular cuyas regiones son pentágonos y hexágonos (no tienen por que ser polígonos regulares), entonces M tiene exactamente 12 pentágonos.

   Solución. Denotamos por p al número de pentágonos y por h al número de hexágonos de M. Supongamos que, además, v es el número de vértices y e el número de aristas de M. Entonces, la fórmula de Euler nos dice que

   $$v + p + h = e + 2.$$

   Además, como el grado de cada vértice es 3, por el Teorema 5.1, $3v = 2e$.

   Por otra parte, como se trata de un grafo plano, podemos aplicar el Teorema 5.12, para deducir que $5p + 6h = 2e$.

   Llegamos así a un sistema lineal de 3 ecuaciones con 4 incógnitas:

   $$\left\{\begin{array}{rcl} v+p+h & = & e+2 \\ 3v & = & 2e \\ 5p+6h & = & 2e. \end{array}\right.$$

   Despejando h de la primera ecuación ($h = e+2-v-p$) y, sustituyendo en la tercera, llegamos a $p = 12 + 4e - 6v$. Pero teniendo en cuenta la segunda ecuación, se deduce que $p = 12$. ■

5. Calcula el número de pentágonos, hexágonos, aristas y vértices que tiene un balón de fútbol, o lo que es lo mismo, un icosaedro truncado.

   Solución. Como se puede ver en la figura 5.27, el conocido balón de fútbol tiene una forma que nos resulta familiar. Observamos que si lo desinflamos un poco, de forma que se pierda la curvatura de sus caras, éstas se convierten en pentágonos y hexágonos regulares. Es, por tanto, un poliedro regular conocido como icosaedro truncado.

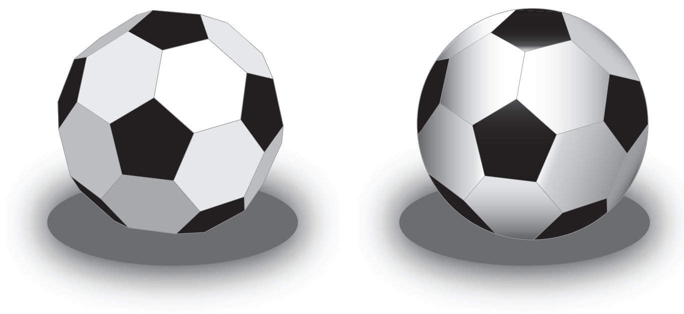


Figura 5.27: Un icosaedro truncado y un balón de fútbol.

Aunque podríamos contar «a mano» el número de sus caras, podemos deducirlo usando razonamientos matemáticos. Así, como el poliedro que forma el balón de fútbol se puede transformar en un grafo plano cuyas regiones son pentágonos y hexágonos, por el ejercicio anterior, ya sabemos que el número de pentágonos es exactamente 12.

Para contar las aristas podemos razonar como sigue: Cada pentágono está rodeado por cinco hexágonos. Esto daría 60 hexágonos, pero en realidad, cada uno de los hexágonos está unido a tres pentágonos diferentes. Luego hemos contado los hexágonos por triplicado y el número total de hexágonos es 20.

Para contar las aristas, tenemos 6 por cada hexágono y 5 por cada pentágono. Pero con este razonamiento, cada arista ha sido contada dos veces, luego el número de aristas es

$$e = \frac{5 \times 12 + 6 \times 20}{2} = 90.$$

Por último, como el icosaedro truncado da lugar a un grafo que es 3-regular, $3v = 2e$ y, por tanto, el número de vértices es $v = 60$. ■

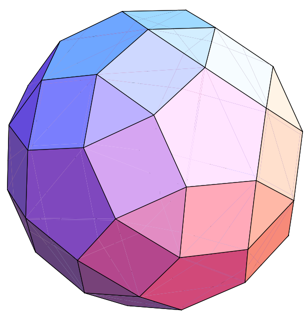


Figura 5.28: Un rombicosidodecaedro.

Como curiosidad, el volumen del icosaedro truncado ocupa el 86,74 % de la esfera circunscrita. Si se infla, el porcentaje puede superar el 90 %. Hay otros poliedros que aproximan mejor el volumen de una esfera. Por ejemplo el rombicosidodecaedro (véase la figura 5.28) llega a ocupar, sin inflar, el 93,32 % de la esfera. Esta figura está formada por 12 pentágonos, 30 cuadrados y 20 triángulos, es decir 62 caras frente a las 32 del icosaedro truncado. Tal vez éste sea el motivo de que esta figura no haya sido utilizada por ningún fabricante de balones. Por cierto, ¿cuántos vértices y aristas tiene?

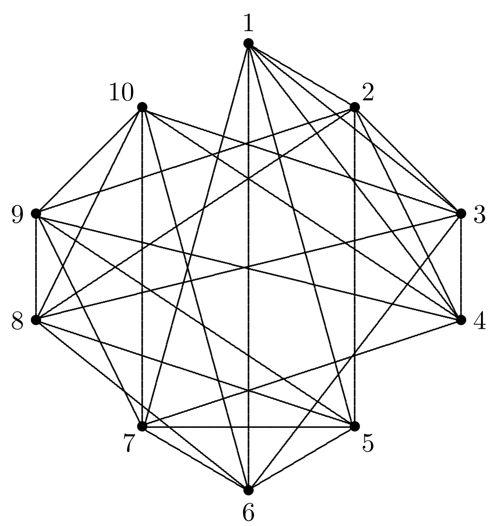
6. En la sesión inaugural del Festival Internacional de Cine de Logroño se proyectan diez películas, de dos horas de duración cada una. Cinco famosos críticos cinematográficos han decidido ir a algunas de las películas, tal y como se muestra en la tabla 5.3.

Tabla 5.3: Preferencias a la hora de ver las películas

Película	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Crítico	A,B	A,C	A,D	A,E	B,C	B,D	B,E	C,D	C,E	D,E

Si los organizadores han decidido respetar las preferencias de los críticos, ¿cuántas horas de proyección son necesarias?

Solución. El problema se puede plantear como un problema de coloración de grafos, donde los vértices son las películas y las aristas unen dos películas si un mismo crítico quiere verlas. Así, los vértices 1 y 2 están unidos, pues el primer crítico quiere ver ambas películas. Los vértices 1 y 8 no están unidos pues ningún crítico tiene ambas películas entre sus preferencias. Este planteamiento da lugar al siguiente grafo:



Observamos que el subgrafo formado por los vértices 1,2,3 y 4 forma el grafo completo K_4. Luego se necesitan como mínimo 4 colores.

Se puede probar, tras un breve razonamiento, que no existe ninguna 4-coloración. Sin embargo, sí que existen 5-coloraciones (hay varias), como por ejemplo, la que da lugar a la tabla 5.4:

Tabla 5.4: Una posible solución al problema de las películas.

Sesión	1	2	3	4	5
Películas	1, 9	2, 6	3, 7	4, 8	5, 10

Por tanto, se necesitan 10 horas de proyección en 5 sesiones ■

7. El Sudoku (abreviatura japonesa de *Suji wa dokushin ni kagiru*, que podría traducirse por «números solteros») es un conocido pasatiempo que se puso de moda en Japón a finales de los 80 y, posteriormente, su popularidad se extendió a todo el mundo. En su forma más tradicional, el juego parte de un tablero de tamaño 9×9 formado por 9 bloques de tamaño 3×3. Algunas celdas pueden venir rellenas con un número dado. El juego consiste en rellenar todas las celdas vacías, con un número en cada celda, de forma que cada fila, cada columna y cada bloque contengan los números $\{1, 2, \ldots, 9\}$ exactamente una vez.

Plantea el problema de encontrar todas las posibles formas de rellenar un Sudoku 9×9 en términos de coloración de grafos. Resuelve el caso particular (más sencillo) de un Sudoku 4×4.

Solución. El problema puede plantearse en términos de grafos de la siguiente manera. Se construye un grafo donde los vértices son las casillas (81 vértices). Dos vértices están unidos por una arista en los siguientes casos:

a) Están en la misma fila.
b) Están en la misma columna.
c) Están en el mismo bloque.

Los vértices del grafo en cuestión pueden ser etiquetados con el conjunto de pares ordenados (i, j), $i, j = 1, \ldots, 9$. Dos vértices distintos (i, j) y (m, n) están unidos por una arista si y sólo si:

a) $i = m$.
b) $j = n$.
c) $[i/3] = [m/3]$ y $[j/3] = [n/3]$, donde $[x]$ es la parte entera de un número real x.

Notemos que cada vértice de este grafo está unido con otros 20. El problema consiste, por tanto, en encontrar el número de 9-coloraciones de este grafo.

La solución de este problema no es sencilla. Enseguida se descarta la idea de buscar un procedimiento de «fuerza bruta» partiendo del total de posibles formas de rellenar el cuadrado 9×9 sin respetar las tres reglas anteriores. Este número, $81!/(9!)^9$ es del tamaño de $5{,}3 \times 10^{70}$ y desbordaría la capacidad de cálculo de cualquier ordenador. En mayo de 2005, se probó ([29]) que el número de maneras de rellenar un Sudoku 9×9 es

$$6\,670\,903\,752\,021\,072\,936\,969 \simeq 6{,}7 \times 10^{21}.$$

Este número se puede factorizar de la forma

$$9! \times 72^2 \times 2^7 \times 27\,704\,267\,971,$$

siendo el último factor un número primo. Para su obtención se combinó un razonamiento lógico con el uso de algoritmos computacionales. Para ver el estado actual del tema, resultados y conjeturas, se puede consultar la web de *Matemáticas del Sudoku* en la enciclopedia libre *Wikipedia* [30].

El caso del Sudoku de tamaño 4×4 es considerablemente más sencillo. Se trata de colocar los números $\{1, 2, 3, 4\}$ en un tablero 4×4 respetando las reglas del juego. Una solución válida del problema sería la siguiente:

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

Si no hubiese restricciones, el número de soluciones sería

$$\frac{16!}{4!4!4!4!} = 63\,063\,000.$$

Pero, ¿cuántas de éstas son válidas?

Podemos empezar coloreando el cuadrante superior izquierdo. Esto se puede hacer de 4! formas. Para una de estas coloraciones concretas, el resto queda completamente determinado asignando dos colores en la parte no coloreada de la diagonal principal. Esto se puede hacer de $V(4, 2) = 4 \times 3 = 12$ formas. Por tanto, hay $12 \times 4! = 288$ diferentes Sudokus válidos de tamaño 4×4. ∎

5.10. Problemas propuestos

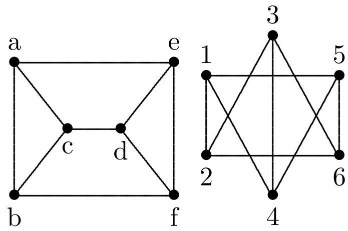
1. Dibuja todos los grafos no isomorfos con:
   - 4 vértices.
   - 5 vértices y 3 aristas.
   - 6 vértices y 4 aristas.
   - 3 vértices (dirigido).

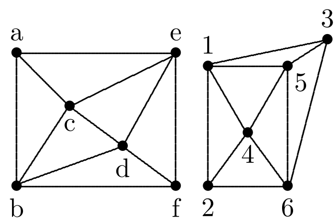
2. ¿Existen grafos con cinco vértices de los siguientes grados? En caso afirmativo, dibuja uno.

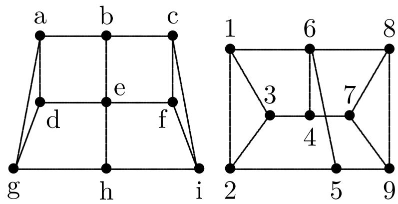
   a) 3, 4, 3, 4, 3. b) 1, 2, 3, 4, 4. c) 1, 2, 2, 3, 4. d) 0, 1, 2, 2, 3.

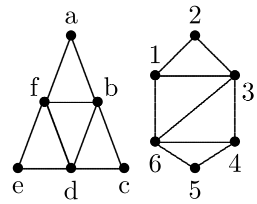
   e) 2, 2, 4, 4, 4. f) 2, 2, 2, 2, 2. g) 3, 3, 3, 3, 3. h) 4, 4, 4, 4, 4.

3. ¿Cuáles de los siguientes pares de grafos son isomorfos? Justifica la respuesta.

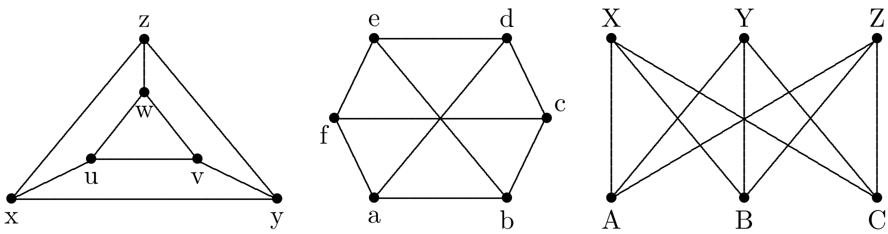
3.1)


3.2)


3.3)


3.4)


4. ¿Cuáles de los siguientes grafos son isomorfos? Justifica la respuesta.



5. Demuestra que todos los grafos regulares de 5 vértices y grado 2 son isomorfos.

6. ¿Cuántos grafos regulares de grado 3 y 6 vértices no isomorfos hay? Dibújalos.

7. ¿Cuál es el número máximo de vértices que puede tener un grafo con 19 aristas de forma que sus vértices tengan como mínimo grado 3?

8. Sea G un grafo regular de grado p, con p impar. Demuestra que el número de aristas es un múltiplo de p.

9. Sea G un grafo cuyos vértices tienen todos grado impar menos uno. ¿Cuántos vértices de grado impar tiene su complementario $\bar{G}$?

10. Demuestra que dos grafos de tres vértices son isomorfos si y sólo si tienen el mismo número de aristas. Prueba que esto es falso para grafos de 4 vértices.

11. Determina $|V|$ para los siguientes grafos G y dibuja uno de cada tipo:

    a) G tiene nueve aristas y todos los vértices tienen grado 3.

    b) G es regular con 15 aristas.

    c) G tiene 10 aristas con dos vértices de grado 4 y los restantes de grado 3.

12. Se quiere establecer una red de conexiones entre 21 ordenadores de una facultad, de forma que cada uno de ellos esté conectado exactamente con otros cinco. ¿Es posible hacer esta red?

13. De cada uno de los aeropuertos de un país salen tres vuelos a otras tantas ciudades. ¿Puede haber 100 vuelos entre las distintas ciudades del país?

14. ¿Se pueden dibujar 9 segmentos en una pizarra de tal manera que cada uno de ellos corte exactamente a otros tres?

15. ¿Para qué valores de n, K_n tiene un circuito euleriano? ¿Hay algún K_n que tenga un recorrido euleriano, pero no un circuito euleriano?

16. Consideremos el problema de los puentes de Konigsberg.

    (a) ¿Cuántos puentes habría que suprimir para que haya un recorrido euleriano? ¿Y para que haya un circuito euleriano?

    (b) Supongamos que hay una tercera isla entre las dos existentes (el puente entre las antiguas islas ha sido suprimido). Construye los puentes que sea preciso entre la nueva isla y el resto de la ciudad para que exista un circuito euleriano.

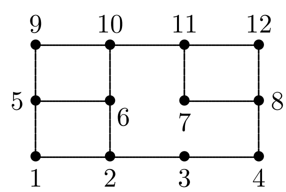
17. Un *puente* es una arista que al ser suprimida desconecta un grafo.

    (a) ¿Puede un grafo con un circuito euleriano tener un puente?

    (b) Da un ejemplo de un grafo con 10 aristas con un recorrido euleriano y un puente.

18. ¿Es posible que un caballo de ajedrez realize todos los posibles movimientos en el tablero una sóla vez?

19. ¿Cuántas veces es necesario levantar el lápiz del papel para dibujar el siguiente grafo?



20. ¿Cuántos ciclos hamiltonianos diferentes hay en K_n, el grafo completo de n vértices?

21. Prueba que K_n, con n primo mayor o igual que 3, puede tener sus aristas divididas en $(n-1)/2$ ciclos hamiltonianos disjuntos.

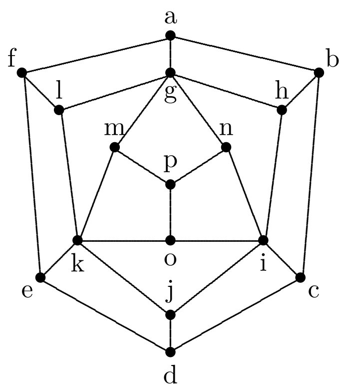
22. Prueba, para $n \geq 3$, que un grafo con n vértices y al menos $\binom{n-1}{2}+2$ aristas tiene un ciclo hamiltoniano. Demuestra que si hay sólo $\binom{n-1}{2}+1$ aristas el resultado anterior es falso.

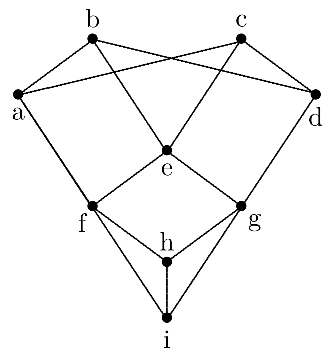
23. Tenemos un grafo bipartido con los vértices divididos en dos conjuntos, que denominaremos rojos y azules, de manera que cada arista conecta un vértice rojo con uno azul.

    (a) Demuestra que si un grafo bipartido conexo tiene un ciclo hamiltoniano entonces el número de vértices rojos y azules es el mismo. Además, si un grafo bipartido tiene un número impar de vértices entonces no tiene ciclos hamiltonianos.

    (b) Demuestra que si un grafo bipartido conexo tiene un camino hamiltoniano entonces el número de vértices azules y rojos se diferencian a lo sumo en uno.

    (c) Usa el apartado (a) para probar si los siguientes grafos tienen ciclos hamiltonianos.





24. En un grupo de 12 personas todos conocen al menos a 6 personas. Demuestra que se pueden sentar los 12 alrededor de una mesa circular de modo que todas las personas conozcan a los que están sentados a su lado.

25. El *k-cubo* Q_k es el grafo que tiene por vértices las palabras de longitud k en el alfabeto $\{0, 1\}$ y cuyas aristas unen las palabras que difieren en una posición exactamente. Demuestra:

    (a) Q_k es un grafo regular de grado k.

    (b) Q_k es bipartido.

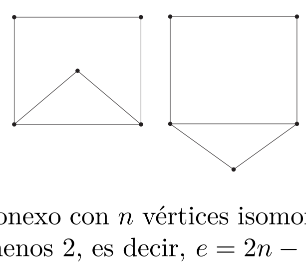
    (c) Q_k tiene un ciclo hamiltoniano.

26. Un caballo de ajedrez se sitúa en un tablero de 3×4 casillas. ¿Es posible que el caballo recorra las doce casillas sin pasar dos veces por ninguna de ellas y empezando y acabando en la misma casilla? ¿Y si empieza y acaba en casillas distintas?

    ¿Qué ocurre en un tablero de tamaño 8×8?

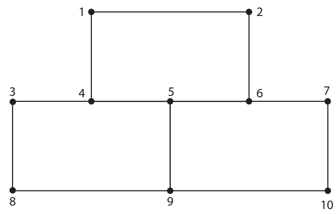
27. Sea un grafo plano $G = (V, E)$ que divide el plano en k regiones $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Llamamos *grafo dual* de G a otro grafo $G^d = (V^d, E^d)$ donde los vértices son las regiones del grafo G y hay una arista que une r_i y r_j por cada arista de G que separa las regiones r_i y r_j.

    - Prueba que el grafo dual de K_4 es isomorfo a K_4.
    - Prueba que los siguientes grafos son isomorfos, pero no sus duales.



    - Prueba que si G es un multigrafo conexo con n vértices isomorfo a su dual, entonces el número de aristas es dos veces el de vértices menos 2, es decir, $e = 2n - 2$.

- ¿Es posible trazar en la siguiente figura una curva que corte a todas sus aristas una sóla vez?



28. Encuentra otras subdivisiones elementales del grafo bipartido $K_{3,3}$, como subgrafos del grafo de Petersen G_P, que sean distintas a la del Ejemplo 5.21.

29. Un grafo plano tiene 9 vértices con grados 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4 y 5. ¿Cuántas aristas tiene? ¿Y cuántas regiones?

30. Un grafo tiene seis vértices numerados de 2 a 7. Dos vértices están unidos por una arista si y sólo si son primos entre sí. ¿Es este grafo plano?

31. Encuentra un ejemplo de un grafo plano regular de grado 4. Da también un ejemplo de un grafo plano con seis vértices y un ciclo de longitud mínima 4.

32. Calcula el polinomio cromático de los grafos completos K_3 y K_4.

33. Supongamos un mapa formado por la intersección de n círculos. Prueba que las regiones del mapa pueden colorearse usando sólo dos colores.

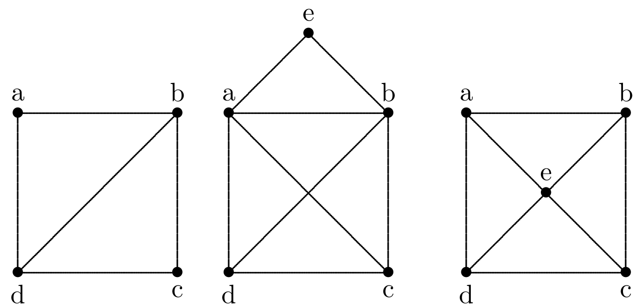
34. ¿Cuántos colores son necesarios para colorear las 15 bolas de billar americano, en formación triangular, sin que haya dos bolas del mismo color tocándose?

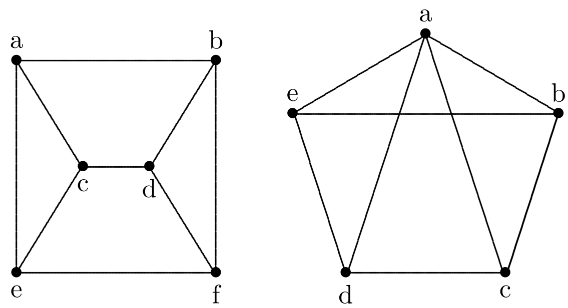
35. Las selecciones de fútbol de España (ES), Inglaterra (IN), Portugal (PO), Holanda (HO), Grecia (GR), Francia (FR), Italia (IT) y Alemania (AL) se enfrentan en un torneo amistoso que va a celebrarse en Logroño. Por motivos de seguridad (debido a ciertas enemistades entre jugadores) no deben alojarse en el mismo hotel las selecciones de GR y ES; IN y ES; IT y ES; IT y IN; IN y HO; IT y HO; FR y PO; FR y HO; FR y AL; AL y PO; AL y GR; IN y GR. ¿Cuál es el menor número de hoteles que deberá disponer la organización para que dos selecciones que están en conflicto no se alojen en el mismo hotel?

36. Plantea y resuelve en términos de coloración de grafos el problema de progamar los exámenes de 6 asignaturas de manera que ningún estudiante tenga dos exámenes el mismo día, si el listado de alumnos matriculados en cada asignatura es el siguiente:

Asignatura	Alumnos matriculados
Gestión de Empresas	Ana, Carlos, Emilio, Gemma
Matemáticas III	Benito, David, Francisco
Seguridad e Higiene	Ana, Benito, Gemma
Ingeniería del Transporte	Carlos, Francisco
Medio ambiente	Emilio, Francisco
Control	Ana, Benito, David, Emilio, Gemma

37. Calcula el polinomio cromático de los siguientes grafos:





38. Comprueba las siguientes relaciones entre grafos y polinomios cromáticos:

- Grafo completo K_n: $\dfrac{k!}{(k-n)!}$.
- Octaedro: $k(k-1)(k-2)(k^3-9k^2+29k-32)$.
- 3-cubo: $k(k-1)(k^6-11k^5+55k^4-159k^3+282k^2-290k+133)$.
- Grafo de Petersen (ejemplo 5.21):

$$k(k-1)(k-2)(k^7-12k^6+67k^5-230k^4+529k^3-814k^2+775k-352).$$

Capítulo 6

Árboles

6.1. Introducción

Existe un tipo particular de grafos que merece la pena destacar, tanto por su utilidad y aplicaciones prácticas como por sus importantes propiedades matemáticas. El propio nombre de árbol nos da una idea intuitiva de la estructura que nos vamos a encontrar, con vértices, ramificaciones, hojas, etc. Quizá una primera idea que se nos viene a la cabeza para pensar en un problema relacionado con árboles es el del emparejamiento de los equipos o participantes de una competición deportiva, que se van enfrentando dos a dos, y sólo uno de ellos pasa a la siguiente ronda hasta alcanzar la final y, en su caso, ser el campeón (figura 6.1).

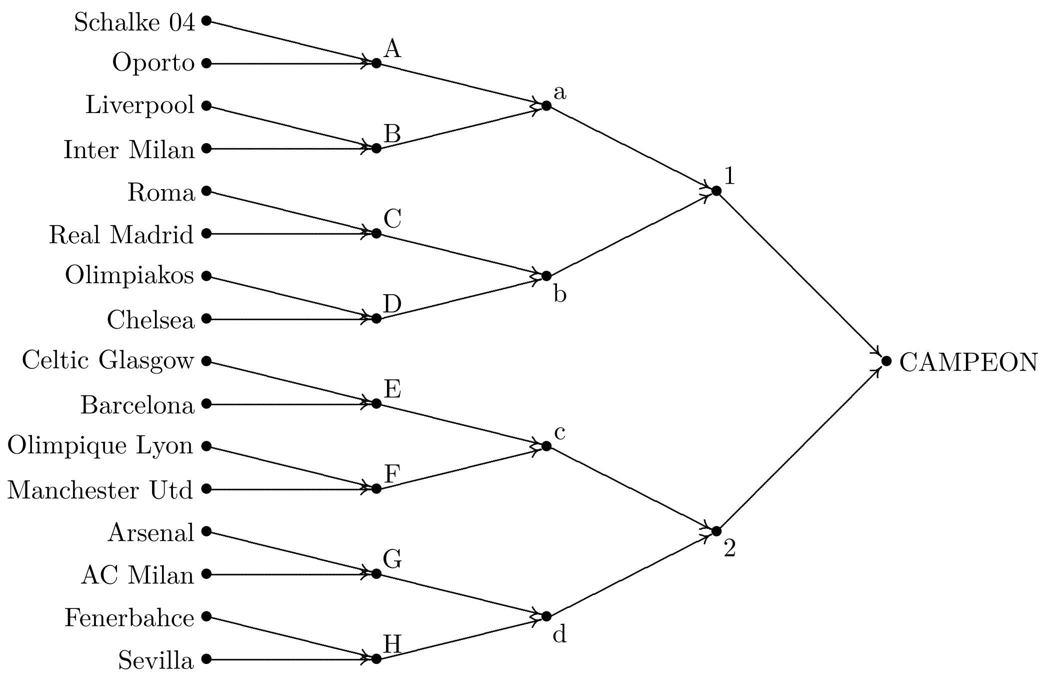


Figura 6.1: Emparejamientos en una hipotética Liga de Campeones.

Existen muchas otras situaciones que podemos asociar con la idea de árbol. Por ejemplo, un árbol genealógico (el propio nombre lo dice) o el resultado de la búsqueda de una carpeta en un ordenador.

El concepto de árbol tiene aplicación en un gran número de problemas, tales como problemas de probabilidad, diseño de algoritmos de búsqueda y clasificación de la información, problemas de toma de decisiones, análisis de la conexión de un grafo, búsqueda de ciclos hamiltonianos para resolver el problema del viajante, problemas de optimización, análisis de juegos, etc.

6.2. Primeras propiedades de los árboles

Como se ha indicado en la introducción, un árbol es un tipo particular de grafo con propiedades y aplicaciones específicas y que conviene estudiar de forma diferenciada. Existen varias definiciones equivalentes de lo que es un árbol. A continuación presentamos una de ellas y luego introduciremos las demás.

Definición 6.1.- *Se dice que un grafo T es un* árbol *si es conexo y no tiene ciclos.*

Muchas de las aplicaciones de la teoría de grafos hacen uso de un tipo especial de árbol denominado *árbol con raíz*. Éste es simplemente un árbol en el que se ha distinguido uno de los vértices del resto. Más concretamente:

Definición 6.2.- *Un árbol con raíz es un par (T, v^*) donde T es un árbol y v^* es un vértice de T que recibe el nombre de* raíz. *Una* hoja *es un vértice de grado 1 que no sea la raíz; cualquier otro vértice se denomina* interno *o de* decisión. *Notemos que, en particular, la raíz es un vértice interno.*

La definición 6.1 no refleja una de las características más importantes de los árboles: son los grafos conexos que se pueden formar con el menor número de aristas. Ésta y otras propiedades que se pueden deducir de la propia estructura de los árboles se agrupan en el siguiente resultado.

Teorema 6.1.- (Propiedades de los árboles) *Si $T = (V, E)$ es un árbol con $|V| \geq 2$, entonces:*

1. *Para cada par de vértices x e y, existe un único camino de x a y en T.*
2. *El grafo que se obtiene de T al eliminar cualquier arista tiene dos componentes conexas, cada una de los cuales es un árbol.*
3. *Si añadimos una arista cualquiera a T, se forma un ciclo.*
4. $|E| = |V| - 1$.
5. $\displaystyle\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|V| - 2$.

Demostración. Las dos primeras propiedades son inmediatas. Para probar la tercera, consideremos dos vértices x e y no adyacentes de T. Como existe un camino entre x e y, al añadir la nueva arista xy, se forma un ciclo. Para probar la cuarta propiedad, basta con asociar a cada vértice su única arista de entrada, que proviene del vértice interno adyacente más próximo a la raíz. Como todos los vértices excepto la raíz tienen una sóla de tales aristas, hay $|V|-1$ aristas. La quinta propiedad se deduce de la anterior y del resultado, válido para cualquier grafo, que asegura $\displaystyle\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$. ■

Los árboles con raíz se suelen representar con la raíz en la parte superior del diagrama y el árbol creciendo hacia abajo, de forma que queda estructurado en niveles.

Definición 6.3.- *Sea (T, v^*) un árbol con raíz, llamamos* nivel *de un vértice x de T a la longitud del único camino entre v^* y x. La altura h de T es el máximo de los niveles de los vértices. Si todas las hojas del árbol se encuentran en los niveles h y $h - 1$, diremos que el árbol es* equilibrado.

Definición 6.4.- *Es claro que la raíz del árbol se encuentra en el nivel 0 y que cualquier otro vértice v en el nivel $k \neq 0$ es adyacente a un único vértice w del nivel anterior. El vértice w se denomina* padre *de v. De forma similar, decimos que v es un* hijo *de w. Así, un vértice es una hoja si, y sólo si, no tiene hijos. Si cada padre tiene m hijos se dice que el árbol es m-*ario*; si $m = 2$ diremos que el árbol es binario y si $m = 3$, ternario.*

Notemos que todo árbol sin raíz se puede transformar en un árbol con raíz sin más que elegir uno cualquiera de sus vértices como la raíz y dirigiendo entonces todas las aristas desde la raíz. Por ejemplo, en el grafo de la izquierda en la figura 6.2, se toma como raíz el vértice etiquetado con una d y a partir de ahí, se dirigen todas las aristas de izquierda a derecha o de arriba a abajo.

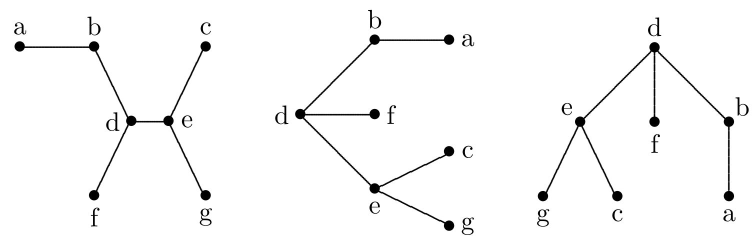


Figura 6.2: Árboles con raíz a partir de un árbol cualquiera.

Teorema 6.2.- *Si T es un árbol m-ario con n vértices e i vértices internos, entonces $n = mi + 1$.*

Demostración. Cualquier vértice de un árbol, excepto la raíz, es el hijo de un único vértice. Además, cada vértice interno tiene m hijos, luego hay un total de mi hijos. Si a este número añadimos la raíz, que es el único vértice que no es hijo de otro, tenemos que $n = mi + 1$. ■

Como consecuencia de este resultado, y teniendo en cuenta que $l + i = n$, siendo l el número de hojas, se deducen las siguientes propiedades:

Corolario 6.3.- *Si T es un árbol m-ario con n vértices, de los cuales i vértices son internos y l son hojas, se tiene que*

(a) Dado i, entonces $l = (m-1)i + 1$ y $n = mi + 1$.

(b) Dado l, entonces $i = (l-1)/(m-1)$ y $n = (ml-1)/(m-1)$.

(c) Dado n, entonces $i = (n-1)/m$ y $l = [(m-1)n + 1]/m$.

Veamos a continuación algunos problemas que se pueden resolver usando árboles. En concreto usaremos los denominados *árboles de decisión* (de ahí el nombre de vértices de decisión). Éstos son árboles con raíz que se usan para modelar procesos de decisión en múltiples pasos (en cada paso interviene una operación binaria o m-aria), donde la decisión tomada en cada paso afecta a las posibles decisiones en el siguiente paso. Así pues, los vértices de decisión representan los puntos en los cuales es necesario tomar una decisión. Un ejemplo clásico, en el que se usan árboles de decisión, es el problema de determinar una moneda falsa, de entre un conjunto de monedas dado, utilizando una balanza de platillos.

Ejemplo 6.1.- (Un árbol de decisión) *Supongamos que tenemos n monedas, de las cuales una de ellas es falsa y pesa menos que las demás. Si únicamente tenemos una balanza de platillos para pesar las monedas, ¿qué estrategia debemos seguir para encontrar la moneda falsa?*

Ejemplo 6.2.- (Un árbol de ordenación) *Dada una lista formada por tres números cualesquiera, se quiere ordenarlos usando comparaciones binarias. Para ello, se puede diseñar el siguiente algoritmo: en el primer paso, comprobamos si el primer elemento es menor o igual que el tercero. Si la respuesta es sí, los dejamos como están y si es no, los permutamos. A continuación hacemos lo mismo con los elementos segundo y tercero. Por último, comparamos los elementos primero y segundo. Construye el árbol binario con 6 hojas y de altura 3, al que da lugar este proceso. ¿Se pueden ordenar estos números usando comparaciones binarias en menos pasos?*

Ejemplo 6.3.- (El juego de Nim) *En el juego de Nim participan dos jugadores, llamémosles A y B. De un montón inicial de monedas cada jugador va retirando alternativamente una o dos monedas. Gana el jugador que retira las últimas monedas de la mesa. Describe el posible desarrollo de una partida (por ejemplo, para 6 monedas) usando árboles. Los vértices de decisión podrían ir etiquetados con una letra, indicando el jugador al que le toca jugar, y un número, que indica el número de monedas de que dispone. Así, si comienza a jugar A, el primer vértice (raíz) sería $A6$. De aquí se podría pasar a $B5$ o $B4$ y así sucesivamente. Podemos etiquetar las hojas con una G si A gana la partida y con una P si la pierde. Plantea la evolución del juego de Nim y analiza si tiene ventaja el empezar a jugar o no.*

Ejemplo 6.4.- *Acabo de recibir un correo electrónico de un amigo de otra universidad en el que me augura toda una serie de desgracias si no se lo reenvío a 10 personas más. Alarmado, envío el correo a 10 compañeros de mi universidad con el objetivo de que lo hagan llegar a otros 10 (sin repetir destinatarios), así hasta completar las 7 500 personas que forman la comunidad universitaria. Si la cadena se hace correctamente, ¿cuántas personas tendrán que enviar correos electrónicos?*

Se puede interpretar la cadena de correos electrónicos como un árbol 10-ario con raíz, en el que las aristas son los correos electrónicos y los vértices internos las personas que los envían. Como el número total de vértices es $n = 7\,500$, tenemos que

$$i = (n-1)/m = 749{,}9,$$

por lo que la cadena no puede ser un auténtico árbol 10-ario (tendría que haber o bien 7 491, o bien 7 501 universitarios para que la división fuese exacta). Una solución práctica es que 749 personas manden 10 correos y una persona mande sólo 9 correos. La propagación de los correos queda como sigue: yo mando un correo a 10 compañeros, que a su vez lo envían a otros 10 (en total, 100 personas reciben un correo electrónico en esta segunda fase) y éstos a otros 10 (1 000 personas reciben un correo electrónico en la tercera fase). De éstas 1 000 personas, no todas envían correos electónicos. Sólo 638 mandan 10 correos cada uno, otra persona más envía 9 correos, y el resto, ninguno. En total, el número de personas que reciben el correo electrónico (incluido uno mismo) es:

$$1 + 10 + 100 + 1\,000 + 6\,380 + 9 = 7\,500.$$

De ellos, $1 + 10 + 100 + 638 + 1 = 750$ han enviado correos electrónicos (son vértices de decisión) y, el resto, $6\,380 + 9 + 361 = 6\,750$ reciben el correo pero no lo envían (hojas). ■

Ejemplo 6.5.- *En un torneo de ping-pong hay 108 participantes inscritos. Se van enfrentando por parejas, quedando el perdedor eliminado, así hasta llegar a la final. ¿Cuántos partidos se juegan?*

El torneo puede interpretarse como un árbol binario en el que las hojas son los jugadores y los vértices internos los partidos. Como $l = 108$ y $m = 2$, se tiene que $i = (l-1)/(m-1) = 107$ partidos.

Aunque los árboles pueden simplificar y sistematizar muchos problemas complejos, no son la única alternativa para resolverlos y, en ocasiones, tampoco son la opción más sencilla. En este caso concreto, un simple razonamiento nos lleva a concluir que, como se han de eliminar 107 de los 108 jugadores iniciales, y en cada partido se elimina un jugador, el total de partidos es 107. ■

En el caso de árboles binarios no influye que el número de hojas sea par o impar. Así por ejemplo, si en el problema anterior, un jugador se retira a última hora, se puede seguir desarrollando el torneo, en este caso con 106 partidos. Lo único que ocurre es que, en cada ronda, un jugador puede quedar exento y pasar directamente a la siguiente. Esto puede desvirtuar la competición deportiva, pues se puede dar el caso de que un jugador alcance la final jugando muchos menos partidos que el otro. Para evitar este problema, es conveniente exigir que el árbol esté equilibrado. Para ello, el siguiente resultado puede ser de utilidad:

Teorema 6.4.- *Si T es un árbol m-ario de altura h, entonces:*

(a) $l \leq m^h$, *y si todas las hojas del árbol están en el nivel* h, $l = m^h$.

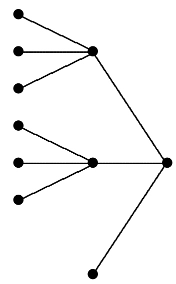
(b) $h \geq \lceil \log_m l \rceil = \lceil \ln l / \ln m \rceil$. *Además, si el árbol es equilibrado, se tiene que*

$$h = \lceil \log_m l \rceil = \lceil \ln l / \ln m \rceil,$$

donde $\lceil r \rceil$ *es el «redondeo por exceso» de un número real* $r \in \mathbb{R}$, *es decir,* $\lceil r \rceil$ *es el menor entero* p *que satisface* $r \leq p$.

Por ejemplo, el árbol asociado a los partidos de la Liga de Campeones (figura 6.1) es binario y tiene 16 hojas. Como está equilibrado, su altura es $h = \lceil \ln 2^4 / \ln 2 \rceil = 4$.

El siguiente árbol ternario ($m = 3$) está equilibrado y tiene 7 hojas. En este caso, su altura es $h = \lceil \ln 7 / \ln 3 \rceil = 2$.



La aplicación más común de los árboles m-arios se centra en los procesos de clasificación y búsqueda. En concreto, se usan árboles binarios para clasificar la información.

En este sentido, supongamos que queremos clasificar una colección de elementos de un conjunto finito A dotado de una relación de orden $\leq$. Supongamos que los elementos de A están dados en forma de lista desordenada $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y que queremos obtener una lista ordenada $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de los mismos elementos, es decir, $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n$.

Existen muchos métodos y técnicas para lograr el objetivo, como los conocidos algoritmos de la burbuja, de selección, de inserción o quick sort. Para más información se puede consultar el libro *Applied Combinatorics* de A. Tucker [24], o los libros más especializados de D. E. Knuth [16, 17].

Finalizamos esta sección con un resultado sobre el número de árboles no isomorfos que se pueden formar con n vértices. Este tipo de problemas son, en general, difíciles de resolver (para hacernos una idea podemos calcular el número de árboles diferentes que hay con 2, 3, 4, 5 y 6 vértices). En general, dado un conjunto de n vértices, sabemos que hay $2^{\binom{n}{2}}$ grafos distintos con ese conjunto de vértices. Para el caso de los árboles, Cayley encontró en 1889 una fórmula particularmente sencilla.

Teorema 6.5.- (Teorema de Cayley) *El número de árboles distintos que se pueden formar con el conjunto de vértices* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *es* n^{n-2}.

Demostración. La demostración consiste en definir una biyección entre el conjunto de vértices y el de sucesiones de $n-2$ elementos formados a partir de n dados (sucesiones de Prufer). Para más detalles, véase el libro de Tucker [24]. ■

6.3. Árboles generadores y algoritmos de búsqueda

En algunas aplicaciones se necesitan algoritmos para decidir cuándo un grafo tiene una cierta propiedad o no, como puede ser la de conexión o la de ser plano, o para encontrar todos los posibles caminos hamiltonianos o para contar el número de veces que aparece una determinada estructura. Usualmente, estos algoritmos se basan en un árbol generador.

Definición 6.5 *Un* árbol generador *o un* árbol maximal, *T, de un grafo G es un subgrafo de G que es un árbol y contiene a todos los vértices de G.*

Existen muchas formas de construir árboles generadores. De hecho, para un mismo grafo existen diferentes árboles generadores. Como dice el teorema de Cayley, un mismo grafo puede tener hasta n^{n-2} árboles generadores diferentes (la cota máxima se alcanza, por ejemplo, para los grafos completos). En general, existen técnicas para contar el número de árboles generadores de un grafo cualquiera. Sin embargo, las formas más usuales de construir árboles generadores tienen que ver con procedimientos de búsqueda, denominados *búsqueda en profundidad* y *búsqueda en anchura.*

El procedimiento de búsqueda en profundidad ó DFS[1].

Partiendo de la raíz v del árbol, el procedimiento consiste en elegir como vértice activo inicial la propia raíz y construir un árbol parcial W de la siguiente manera. Si denotamos por x al vértice activo, siempre

[1]Del inglés Depth First Search.

que el vértice activo x tenga nuevos adyacentes, elegimos uno de ellos, y, y añadimos la arista$\{x, y\}$ a W. Avanzamos a y y sustituimos x por y como nuevo vértice activo. Si no hay nuevos vértices adyacentes a x, retrocedemos al vértice que originalmente nos condujo hasta x. En algún momento del proceso nos hallaremos de nuevo en v sin posibilidad de añadir nuevos vértices, entonces $W = T$. Con este procedimiento cada arista de T es recorrida dos veces, una para avanzar y otra para retroceder.

Si v es un vértice del grafo G y T es el árbol construido mediante el procedimiento de búsqueda en profundidad, entonces T es un árbol generador del componente de G que contiene a v.

El procedimiento de búsqueda en profundidad se utiliza, por ejemplo, para encontrar soluciones a problemas no triviales, como puede ser el de encontrar un camino dentro de un laberinto.

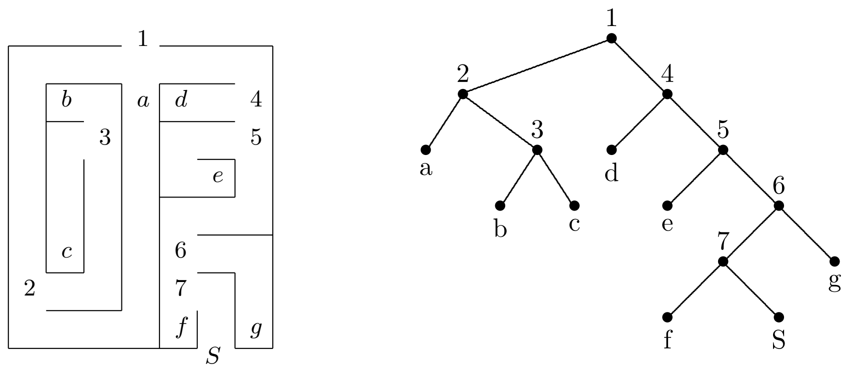


Figura 6.3: Búsqueda en profundidad para salir de un laberinto.

Ejemplo 6.6.- *Usa el procedimiento de búsqueda en profundidad para encontrar un camino dentro del laberinto de la figura 6.3.*

La idea a tener en cuenta es caminar pegado a la pared derecha del laberinto. Cuando llegamos a una calle sin salida, recorremos la pared del fondo y retrocedemos pegados a la pared izquierda del pasillo (que ahora queda a nuestra derecha). Si llegamos a un cruce que ya hemos visitado, situamos una barrera artificial que nos haga retroceder sobre nuestros pasos. El grafo asociado a un laberinto es aquél en el que la raíz es la entrada, el resto de vértices internos son los cruces y las hojas son la salida y las calles sin salida.

En el ejemplo, comenzando en la entrada, 1, vamos avanzando hasta el cruce marcado con un 2. Allí tomamos la opción de la derecha, hasta llegar a un cruce que ya habíamos visitado (1). Situamos allí una pared imaginaria, por lo que nos encontramos con una calle sin salida (a). Volvemos sobre nuestros pasos hasta el cruce 2 y tomamos el pasillo que nos lleva a 3 y así sucesivamente.

Este mismo razonamiento, adaptado al grafo asociado, se transforma en un procedimiento de búsqueda en profundidad, como es sencillo comprobar. ■

El procedimiento de búsqueda en anchura ó BFS[2].

De forma intuitiva, consiste en elegir un vértice como raíz e ir formando árboles parciales como sigue: En primer lugar, se añaden todos los vértices adyacentes a la raíz. A continuación para cada uno de estos adyacentes, se añaden sus respectivos vecinos adyacentes, y así hasta que se recorra todo el árbol.

Con un poco más de rigor, el procedimiento consiste en elegir un vértice x como raíz y construir un árbol parcial W de la siguiente manera. Se considera el primer vértice activo como la raíz. Mientras el vértice activo x tenga nuevos adyacentes, elegimos uno de ellos y, y añadimos la arista $\{x, y\}$ a W. Cuando x no tenga nuevos adyacentes, pasamos al siguiente vértice después de x en el orden original de aparición. Finalmente, llegaremos a un vértice que no tiene nuevos adyacentes y no existe vértice siguiente, entonces $W = T$.

Si v es un vértice del grafo G y T es el árbol construido mediante el procedimiento de búsqueda en anchura, entonces T es un árbol generador del componente de G que contiene a v.

[2] Del inglés Breadth-First Search.

Mediante búsqueda en anchura puede determinarse el camino más corto entre dos vértices dados, donde por más corto se entiende el de distancia mínima, es decir, el que utiliza menos vértices intermedios.

Ejemplo 6.7.- *Tenemos tres garrafas de agua, con capacidades de* 10 *litros,* 7 *litros y* 4 *litros respectivamente. Inicialmente, la garrafa de 10 litros está llena y las otras dos vacías. Podemos echar agua de una garrafa a otra siempre y cuando llenemos la garrafa a la que estamos echando agua o vaciemos la garrafa desde donde estamos echando el agua. Con estas restricciones, ¿hay alguna forma de obtener dos litros de agua en las garrafas de* 7 *o* 4 *litros? Si la hay, encuentra la forma más rápida de llegar a ella.*

Para resolver el problema, consideremos las ternas (x, y, z) que representan las cantidades de agua en las garrafas de 10, 7 y 4 litros respectivamente. En realidad, basta con considerar los pares (y, z), pues $x = 10 - y - z$. Construyamos el grafo dirigido cuyos vértices son las ternas anteriores y las aristas son las formas de verter el agua de una garrafa a la otra, tal como se indica en la figura 6.4. Entonces, continuando el proceso es posible encontrar el camino más corto. ■

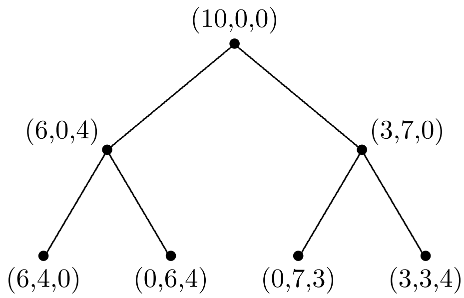


Figura 6.4: Árbol al que da lugar el problema de las garrafas (Ejemplo 6.7).

Aplicación: Determinar si un grafo es conexo.

Una de las aplicaciones de los árboles generadores (o maximales) es la de poder determinar si un grafo es conexo o no lo es. Nótese que si un grafo no es conexo no existe ningún árbol generador. En este sentido, los procedimientos de búsqueda en profundidad y búsqueda en anchura nos proporcionan un método para determinar cuándo un grafo es conexo o no. Cuando el número de vértices es elevado, este problema no es trivial y requiere de técnicas computacionales para el análisis de la matriz de adyacencia asociada al grafo.

En concreto, asociado a la búsqueda en profundidad aparece el concepto de *pila* como un procedimiento para almacenar datos en la memoria de un ordenador. En una pila se sigue el siguiente sistema de almacenamiento: el último elemento que «entra al almacén» ocupa la primera posición para salir del mismo. Podemos visualizar este proceso mediante el ejemplo de almacenar carpetas sobre un escritorio, unas encima de otras. La última carpeta que almacenemos quedará encima de las demás y, cuando queramos retirar alguna, será la primera que tomemos.

Asociado a la búsqueda en anchura está el concepto de *cola*, otra técnica de almacenamiento en la cual el primer elemento en ser almacenado ocupa la primera posición para «salir del almacén». Podemos visualizar este proceso mediante el ejemplo típico de hacer una fila para cualquier cosa, por ejemplo para comprar unas entradas. El primero que llega a la taquilla es el primero en comprarlas, le sigue el segundo y así sucesivamente.

Para un análisis en mayor profundidad de estos algoritmos, puede consultarse el texto *Matemática discreta* de García Merayo [10].

Tabla 6.1: Tabla asociada a un proceso de búsqueda en profundidad.

vértice	adyacencias	vértice activo	pila
v_1	v_2v_7		$\boxed{v_1}$
v_2	$v_1v_4v_5$	v_1	$\boxed{v_2}v_7$
v_3	$v_4v_6v_8$	v_2	$\boxed{v_4}v_5v_7$
v_4	$v_2v_3v_5$	v_4	$\boxed{v_3}v_5v_7$
v_5	v_2v_4	v_3	$\boxed{v_6}v_8v_5v_7$
v_6	v_3	v_6	$\boxed{v_8}v_5v_7$
v_7	v_1	v_8	$\boxed{v_5}v_7$
v_8	v_3	v_5	$\boxed{v_7}$
		v_7	

Ejemplo 6.8.- *Determina, usando un procedimiento de búsqueda en profundidad, si el grafo G con la siguiente matriz de adyacencia es conexo o no.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, ordenamos los vértices $v_1, \ldots, v_8$ conforme a la matriz de adyacencias anterior. En la tabla 6.1 se desarrolla el proceso de búsqueda en profundidad para obtener un árbol generador, indicando en cada paso la evolución de la pila, que es un conjunto de vértices que vamos a denotar con la letra T. Elegimos v_1 como raíz (podríamos haber elegido cualquier otro vértice) y, en un primer paso, formamos la pila únicamente con el vértice v_1: $T = \{v_1\}$.

En el segundo paso, tomamos v_1 como vértice activo, lo eliminamos de la pila y añadimos a la misma los vértices adyacentes a v_1, es decir: $T = \{v_2, v_7\}$. Adoptamos el siguiente criterio: v_7 ha sido el primer elemento en entrar a la pila y v_2, el segundo. Por tanto, como v_2 ha sido el último elemento en entrar en la pila, será el siguiente en abandonarla.

Así, en el tercer paso, tomamos v_2 como vértice activo, lo eliminamos de la pila y añadimos a la misma los vértices adyacentes a v_2 que no hayan sido considerados anteriormente, es decir: $T = \{v_4, v_5, v_7\}$. Manteniendo el criterio de entrada y salida establecido anteriormente, v_4, que ha sido el último elemento en entrar en la pila, será el siguiente en abandonarla, pasando a ser el siguiente vértice activo.

Repitiendo el procedimiento, se completa la tabla 6.1. Por último, utilizando el procedimiento de búsqueda en profundidad, se construye el árbol de la izquierda en la figura 6.5. Como hemos alcanzado todos los vértices de G, G es un grafo conexo. ■

Ejemplo 6.9.- *Determina, usando un procedimiento de búsqueda en anchura, si el grafo G con la siguiente matriz de adyacencia dad en el ejemplo 6.8 es conexo o no.*

En primer lugar, tomamos una ordenación de los vértices: $v_1, \ldots, v_8$. En la tabla 6.2 se desarrolla el proceso de búsqueda en anchura para obtener un árbol generador, indicando en cada paso la evolución de la cola, que es un conjunto de vértices que vamos a denotar con la letra C. Elegimos v_1 como raíz (podríamos haber elegido cualquier otro vértice) y, en un primer paso, formamos la cola únicamente con el vértice v_1: $C = \{v_1\}$.

En el segundo paso, tomamos v_1 como vértice activo, lo eliminamos de la cola y añadimos a la misma los vértices adyacentes a v_1, es decir: $C = \{v_2, v_7\}$. Adoptamos ahora el siguiente criterio:

Tabla 6.2: Tabla asociada a un proceso de búsqueda en anchura.

vértice	adyacencias	vértice activo	cola
v_1	v_2v_7		$\boxed{v_1}$
v_2	$v_1v_4v_5$	v_1	$v_2\boxed{v_7}$
v_3	$v_4v_6v_8$	v_7	$\boxed{v_2}$
v_4	$v_2v_3v_5$	v_2	$v_4\boxed{v_5}$
v_5	v_2v_4	v_5	$\boxed{v_4}$
v_6	v_3	v_4	$\boxed{v_3}$
v_7	v_1	v_3	$v_6\boxed{v_8}$
v_8	v_3	v_8	$\boxed{v_6}$
		v_6	

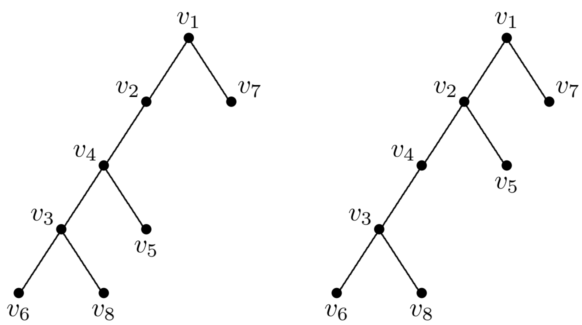


Figura 6.5: Árboles asociados a los procesos de búsqueda en profundidad y de búsqueda en anchura en los ejemplos 6.8 y 6.9.

v_7 ha sido el primer elemento en entrar a la cola y v_2, el segundo. Por tanto, como v_7 ha sido el primer elemento en entrar en la cola, será el siguiente en abandonarla.

Así, en el tercer paso, tomamos v_7 como vértice activo, lo eliminamos de la cola y añadimos a la misma los vértices adyacentes a v_7 que no hayan sido considerados anteriormente. Como v_7 sólo es adyacente a v_1, que ya ha sido considerado como vértice activo, no se añaden nuevos vértices a la cola que queda únicamente $C = \{v_2\}$.

Se toma v_2 como siguiente vértice activo y se añaden a la cola los vértices adyacentes a v_2 que no hayan sido considerados anteriormente, esto es, $C = \{v_4, v_5\}$.

Manteniendo el criterio de entrada y salida establecido anteriormente, v_5, que ha sido el primer elemento en entrar en la cola, será el siguiente en abandonarla, pasando a ser el siguiente vértice activo.

Repitiendo el procedimiento, se completa la tabla 6.2, en la que se indica en cada paso la evolución de la cola.. Así, utilizando el procedimiento de búsqueda en anchura, se construye el árbol de la derecha en la figura 6.5. Como hemos alcanzado todos los vértices de G, G es un grafo conexo. ■

Aplicación: Refuerzo de estructuras.

Veamos ahora cómo usar los árboles y sus propiedades en un problema de ingeniería estructural. En concreto, se trata de determinar si una estructura rectangular (como las que nos podemos encontrar en los cimientos de un edificio) se mantiene rígida bajo la acción de grandes cargas. Por ejemplo, la estructura de la figura 6.6 no es rígida y puede deformarse si está sometida a un gran peso. Para evitar deformaciones, se suelen añadir unos refuerzos en los rectángulos que forman la estructura para que éstos sean indeformables. De forma gráfica, cuando un rectángulo esté reforzado lo marcaremos con una diagonal entre dos de sus vértices. Tenemos que precisar que una cosa es la notación que empleamos para indicar que un rectángulo está reforzado (una diagonal) y otra muy distinta es cómo se ha producido el refuerzo (pueden ser barras cruzadas, escuadras, etc.)

Por ejemplo, la estructura de la figura 6.7 es rígida, pero ¿se pueden eliminar tirantes diagonales manteniendo la rigidez? Podemos responder a esta pregunta en términos de grafos y árboles. Para ello definimos un grafo cuyos vértices son las filas y columnas del armazón. Existe una arista entre un vértice fila con un vértice columna siempre que haya un tirante diagonal en la fila y columna correspondientes. En la figura 6.7 se muestra el grafo asociado a la estructura indeformable adjunta.

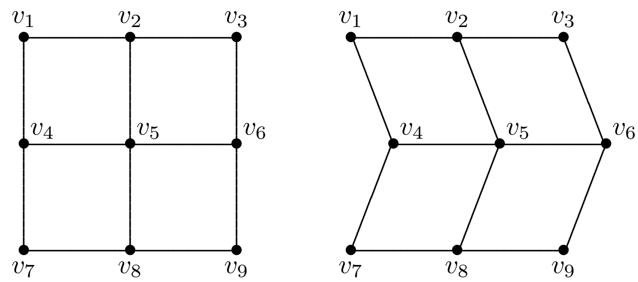


Figura 6.6: Estructura deformable.

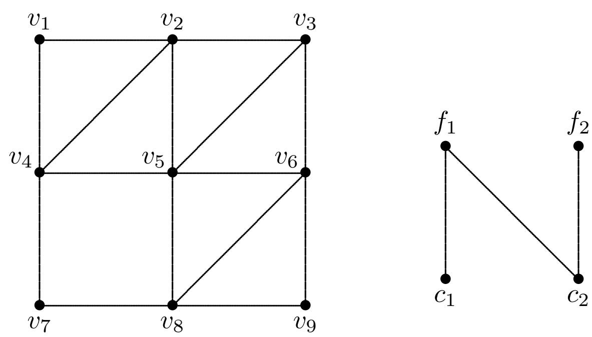


Figura 6.7: Estructura indeformable y grafo al que da lugar.

Ejemplo 6.10.- *Determina si las estructuras de la figura 6.8 son rígidas o no.*

Las estructuras de la figura 6.8 dan lugar a los grafos que se muestran en la figura 6.9. Cuando un rectángulo está reforzado (marcado con una diagonal) se fuerza a las correspondientes fila y columna a mantenerse en ángulo recto. Si en un mismo vértice confluyen tres ángulos rectos, el cuarto está obligado a ser recto. Sin embargo, si sólo confluyen dos rectos, puede haber deformación. En la estructura a) está claro que todas las filas y columnas deben mantenerse en ángulo recto, luego se trata de una estructura rígida. Sin embargo, la estructura b) se puede deformar; la fila 3 y la columna 3 no tienen por qué mantenerse formando ángulo con el resto de filas y columnas. De nuevo, se puede razonar que la estructura c) es una estructura rígida. Observamos que los armazones rígidos, como a) y c) dan lugar a grafos conexos, mientras que los armazones no rígidos, como b), originan un grafo no conexo. ■

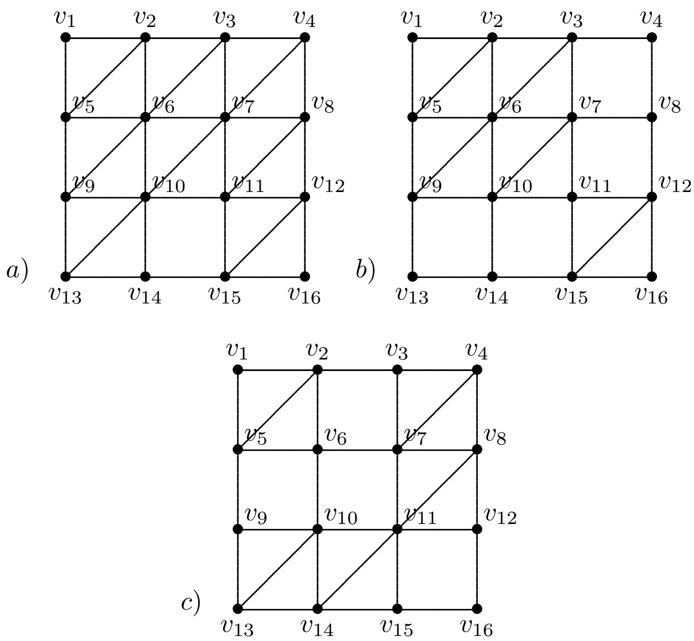


Figura 6.8: Estructuras para el ejemplo 6.10.

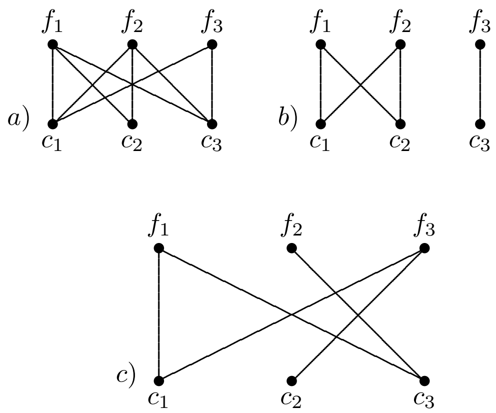
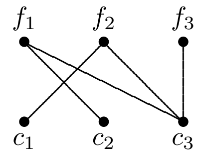


Figura 6.9: Grafos asociados a las estructuras de la figura 6.8 en el ejemplo 6.10.

Estos ejemplos son un caso particular de la siguiente regla general.

Teorema 6.6.- *Si el grafo asociado a una estructura rectangular es conexo, entonces se trata de una estructura rígida. Por el contrario, si el grafo no es conexo, la estructura se puede deformar.*

Profundicemos un poco más en el estudio de las estructuras. Aunque algunas de ellas sean rígidas, puede que estén reforzadas en exceso, es decir, se pueden eliminar tirantes diagonales y el armazón sigue siendo rígido. Esto ocurre, por ejemplo, en la estructura a) de la figura 6.8. Si analizamos el correspondiente grafo, observamos que contiene varios ciclos ($f_1 - c_2 - f_2 - c_3 - f_1$ es uno de ellos). Si eliminamos en este ciclo una arista cualquiera, el armazón sigue siendo rígido. Si eliminamos más aristas de forma que no queden ciclos y el grafo siga siendo conexo, obtendremos una estructura rígida con el mínimo número de refuerzos. Es decir, si encontramos un árbol generador dentro de un grafo, estaremos resolviendo el problema de encontrar una estructura rígida con el mínimo número de refuerzos. Por ejemplo, en el grafo a) podemos quitar aristas hasta dejarlo reducido al siguiente árbol generador



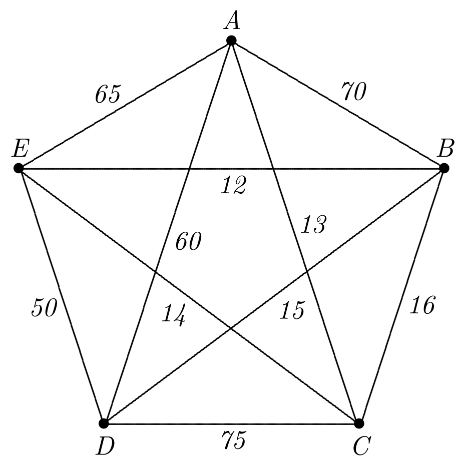
La estructura asociada a este grafo es rígida. En el caso de la estructura c), como el correspondiente grafo ya es un árbol generador, se trata de un reforzamiento mínimo. De nuevo, éstos son casos particulares de una regla más general.

Teorema 6.7.- *Si el grafo asociado a una estructura rectangular es un árbol generador, entonces se trata de una estructura rígida con un reforzamiento mínimo, es decir si se elimina algún tirante diagonal, el armazón deja de ser rígido.*

6.4. Árboles generadores minimales

En otras situaciones, como puede ser la de conectar una serie de poblaciones mediante una red de telecomunicaciones, el problema no es exactamente saber si existe un árbol generador, sino más bien saber cuál es el árbol generador más económico, siendo que una línea de la red, entre dos poblaciones dadas, tiene un determinado coste. Esto nos conduce a los conceptos de *grafo ponderado* y *árbol generador minimal.*

Ejemplo 6.11.- *Supongamos que se va a establecer, de forma experimental, una red inalámbrica entre cinco edificios de un campus universitario. El siguiente grafo muestra los posibles enlaces que se podrían incluir en la red junto con su coste en miles de euros.*



Está claro que para comunicar dos edificios no es necesario un enlace directo, pues se puede mandar un mensaje de uno a otro de forma indirecta. Por ejemplo, enviar un mensaje de A a B y de B a C en lugar de enviarlo directamente de A a C. Supongamos que el coste de enviar un mensaje una vez instalada la red es despreciable comparado con el coste de hacer una comunicación directa. El problema consiste entonces en determinar la red con el mínimo coste que garantice la comunicación entre los cinco edificios del campus.

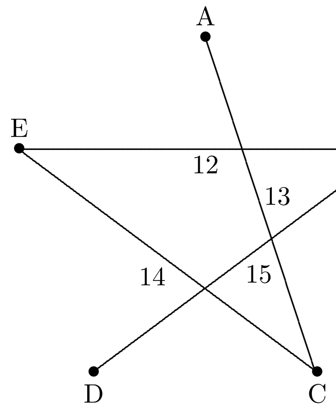


Figura 6.10: Árbol generadpr minimal obtenido por los algoritmos de Kruskal y Prim en el ejemplo 6.12.

Definición 6.6 *Sea $G = (V, E)$ un grafo. En ocasiones, se asocia a cada arista de G un valor numérico, $w(e)$, que se denomina* peso de la arista *e. A la función $w : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ se le denomina* función peso*. En este caso, decimos que G y w constituyen un* grafo ponderado*.*

Podemos asociar esta situación a la red de telecomunicaciones del ejemplo 6.11, donde los pesos de las aristas vienen dados por sus respectivos costes. En el problema planteado con la red de telecomunicaciones, el objetivo es conseguir que el coste de la misma sea mínimo, lo que corresponde a un árbol generador T de G cuyo peso total

$$w(T) = \sum_{e \in T} w(e)$$

sea el menor posible. A esta situación la denominaremos el *problema del árbol generador minimal* de G.

Existen dos algoritmos *voraces* que conducen de una manera directa a un árbol generador minimal de un grafo G de n vértices.

Algoritmo de Kruskal. Consiste en repetir el siguiente paso hasta que el conjunto K tenga $n - 1$ aristas (inicialmente K es vacío): Añadir a K la arista con menor peso que no forme un ciclo con las aristas que ya están en K.

Algoritmo de Prim. Consiste en repetir el siguiente paso hasta que el árbol T tenga $n - 1$ aristas: Añadir a T la arista de menor peso entre un vértice de T y un vértice que no está en T. Como árbol inicial se toma el formado por cualquiera de las aristas de menor peso.

Notemos que en el algoritmo de Prim se parte de un árbol y se van obteniendo árboles en los sucesivos pasos. Sin embargo, en el de Kruskal no es necesariamente así: se van obteniendo distintos bloques, que no tienen por qué ser árboles, y sólo al final se puede asegurar que se obtiene un árbol. En ambos algoritmos, cuando haya varias opciones para añadir nuevas aristas, cualquiera de las opciones puede ser elegida. Aunque es inmediato comprobar que los dos algoritmos conducen a árboles generadores, es algo más complicado demostrar que éstos son además minimales. La demostración puede verse en el libro de Grimaldi [14].

Ejemplo 6.12.- *Encuentra los árboles generadores minimales que se obtienen usando los algoritmos de Kruskal y Prim al grafo ponderado del ejemplo 6.11.*

Usando el algoritmo de Kruskal, añadimos al conjunto vacío la arista de menor peso. En este caso, $K = \{BE\}$, de peso 12. Añadimos a K la siguiente arista con menor peso, en este caso, AC. Ahora $K = \{BE, AC\}$, de peso 25. El siguiente paso es añadir CE, con lo que $K = \{BE, AC, CE\}$ de peso 39. Finalmente, añadimos BD y ya hemos completado las 4 aristas sin formar un ciclo, con lo que se ha terminado el algoritmo de Kruskal.

Usando el algoritmo de Prim, empezamos con un árbol formado por la arista de menor peso, en este caso, $T = \{BE\}$. Añadimos a T la arista CE, de peso 14, con lo que $T = \{BE, BD\}$, de peso 26. El siguiente paso es añadir AC, con lo que $T = \{BE, AC, CE\}$ de peso 39. Finalmente, añadimos BD y ya hemos completado las 4 aristas sin formar un ciclo, con lo que se ha terminado el algoritmo de Prim.

Como vemos, en ambos casos, el coste (peso total) de la red inalámbrica es 54 000 euros, obtenido con el árbol generador minimal que se muestra en la figura 6.10. ■

Ejemplo 6.13.- *Encuentra el árbol generador minimal del grafo ponderado que se muestra en la parte de la izquierda de la siguiente figura e indica si es único.*

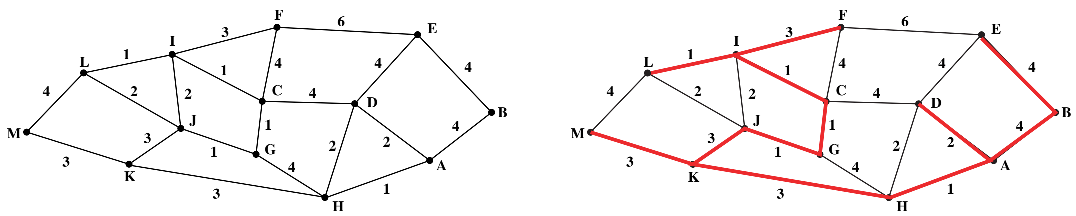


Figura 6.11: Grafo para el ejemplo 6.13 y uno de sus árboles generadores minimales.

Aplicando el algoritmo de Kruskal, tomando una a una las aristas de menor peso que no formen ciclo hasta completar el árbol se obtiene el árbol generador minimal que se muestra en la parte de la derecha de la figura anterior.

La solución no es única, ya que se podrían haber elegido otras opciones sin cambiar el peso total del árbol. Por ejemplo, se puede sustituir la arista AD de peso 2, por la HD, también de peso 2. ■

6.5. El problema del camino más corto y el problema del viajante

En esta sección vamos a analizar dos típicos problemas de optimización que se resuelven con la ayuda de los árboles, como son el *problema del camino más corto* y el *problema del viajante*. A pesar de su aparente similitud, los dos problemas presentan un comportamiento muy diferente. De hecho para el primero existen algoritmos eficientes para su resolución, mientras que esto no ocurre para el segundo problema.

Ambos problemas se pueden plantear en términos de grafos ponderados. Así, en el *problema del camino más corto*, tenemos un grafo ponderado (G, w). Los pesos pueden representar distancias, costes, tiempos, etc. Lo que queremos es hallar el camino más corto de un vértice v a otro w, siendo la longitud de un camino la suma de las pesos de sus aristas.

Existen varios métodos para encontrar el camino más corto entre dos vértices dados. Aquí presentamos el algoritmo de Dijkstra que, de alguna manera, puede considerarse una versión del procedimiento de búsqueda en anchura.

Algoritmo de Dijkstra. Nos proporciona el camino más corto entre un vértice dado y el resto de vértices. La idea del algoritmo es la siguiente. Supongamos que hemos comprobado que el camino más corto de v a un vértice p tiene longitud $l(p)$. Supongamos también que y es adyacente a p y que sólo conocemos una estimación $l(y)$ de la longitud del camino más corto de v a y. La ruta más corta de v a y a través de p tiene longitud $l(p) + w(\{p, y\})$ y, si ésta es menor que $l(y)$, podemos mejorar nuestra estimación asignando a $l(y)$ un nuevo valor igual a

$$\text{mín}\{l(y), l(p) + w(\{p, y\})\}.$$

De forma esquemática, la idea del algoritmo se puede plasmar muy bien en el caso de un triángulo (véase la figura 6.12). Para analizar el camino más corto entre v y p, habrá que considerar el mínimo entre w_1 y $w_2 + w_3$.

Ejemplo 6.14.- *Volviendo a considerar el grafo del ejemplo 6.13, encontrar el camino más corto entre el vértice A y el resto de vértices.*

El camino más corto entre el vértice A y el resto de vértices se obtiene mediante el algoritmo de Dijkstra. Se construye una tabla donde se va incorporando una fila en cada paso. La primera fila se construye como sigue. En la primera columna aparece el que se denomina vértice activo, en este caso A. En el resto de columnas aparecen el resto de vértices y las longitudes de los caminos

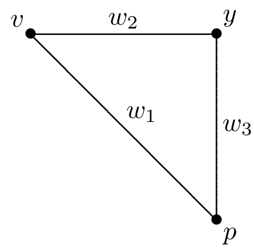


Figura 6.12: Idea del algoritmo de Dijkstra: el camino más corto entre v y p, se obtiene considerando la mínima distancia entre w_1 y $w_2 + w_3$.

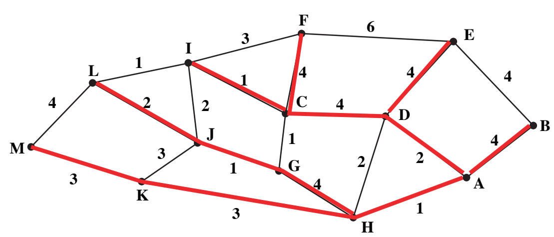
Tabla 6.3: Tabla construida a partir del algoritmo de Dijkstra en el ejemplo 6.14.

v.a.	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
A	4	∞	2	∞	∞	∞	$\boxed{1}$	∞	∞	∞	∞	∞
H	4	∞	$\boxed{2}$	∞	∞	5		∞	∞	4	∞	∞
D	$\boxed{4}$	6		6	∞	5		∞	∞	4	∞	∞
B		6		6	∞	5		∞	∞	$\boxed{4}$	∞	∞
K		6		6	∞	$\boxed{5}$		∞	7		∞	7
G		$\boxed{6}$		6	∞			∞	6		∞	7
C				$\boxed{6}$	10			7	6		∞	7
E					10			7	$\boxed{6}$		∞	7
J					10			$\boxed{7}$			8	7
I					10						8	$\boxed{7}$
M					10						$\boxed{8}$	
L					$\boxed{10}$							

correspondientes al vértice A. Si no hay posibilidad de conectar un vértice con A en un paso dado, se indica con el símbolo ∞. Así por ejemplo, inicialmente podemos conectar A con los vértices B (longitud 4), D (longitud 2) y H (longitud 1). El resto de vértices se etiquetan con ∞.

En la segunda fila, se incorpora como vértice activo uno de los más cercanos a A, en este caso, H. Al incorporar H como vértice activo, se pueden establecer nuevas conexiones con A vía H. Así, G y K podrían conectarse con A con caminos de longitud $4+1=5$ y $3+1=4$ respectivamente. Además, se abre una nueva vía entre A y D, pasando por H. En este caso, tenemos que seleccionar la mejor opción. Como el peso de la arista AD es 2 y la suma de los pesos de las aristas AH y HD es 3, la mejor opción es la primera, luego la longitud del camino (peso) entre A y D se mantiene como 2. Reiterando el proceso, se obtiene la tabla 6.3.

A partir de la tabla 6.3, se puede dibujar el árbol de pesos mínimos, sin más que tomar las aristas en las que aparece por primera vez el valor mínimo de la longitud del camino. Por ejemplo, la arista CF, pues el camino de longitud mínima a F aparece cuando está activo el vértice C.



■

Consideremos ahora un problema, similar al que acabamos de tratar, conocido como *el problema del viajante*. Este problema es uno de los típicos problemas matemáticos que parecen tener una solución relativamente fácil pero que, en la práctica, resultan muy complicados. El problema consiste en, dado un grafo ponderado, encontrar el ciclo hamiltoniano de coste mínimo, entendiendo por coste la suma de los pesos de las aristas del ciclo. Hay muchas situaciones que conducen a resolver un problema del viajante (PV):

- Determinar el recorrido de coste mínimo que tiene que hacer un viajante que sale de su casa, para recorrer unos puntos de venta y regresar a su casa.
- El recorrido de un autobús que sale de su garaje, recoge a unas personas, las lleva a sus puestos de trabajo y vuelve a su garaje.
- Programar a un robot para que taladre una serie de placas, haciendo los agujeros en un orden determinado.

A pesar de la similitud de los problemas, no se conoce ningún algoritmo eficiente que resuelva de forma directa el problema del viajante. Esto es debido a que para un grafo completo de n vértices hay $(n-1)!/2$ ciclos hamiltonianos diferentes, lo que conduce a algoritmos de complejidad exponencial. Por ello, en la práctica, no se emplean algoritmos de «fuerza bruta» para resolver el (PV). Estos algoritmos servirían para encontrar una solución exacta del problema, pero el coste operacional que conllevan podría desbordar la capacidad de trabajo de los ordenadores actuales. A modo ilustrativo, si pensamos en un problema que conlleve un número de 25! operaciones (un grafo K_{26}, por ejemplo) y suponemos que cada operación realizada en un ordenador requiere una billonésima de segundo (algo todavía inviable), se necesitarían unos 15 billones de segundos, es decir, unos 400.000 años para realizar los cálculos. Con este ejemplo se quiere poner de manifiesto que no basta con conocer un método para resolver un problema. Hace falta, además, que dicho método sea eficiente.

En el caso del (PV) existen métodos rápidos que nos permiten encontrar una solución aproximada del problema, es decir nos darán un recorrido que, si bien puede no ser el óptimo, estará cerca de él y se obtendrá de una forma eficiente. En este contexto, entendemos por algoritmo rápido o eficiente aquél que según va creciendo el tamaño de los datos del problema (el número de puntos de venta, n) el tiempo necesario para resolverlo crece no más rápido que una función polinómica de n.

Se ha probado que no puede existir un algoritmo rápido para resolver el (PV). Por ello, se ha adoptado una estrategia diferente para tratar los problemas del tipo (PV). En lugar de buscar un algoritmo que nos proporcione la solución óptima, se buscan los denominados *algoritmos heurísticos*, que se acercan bastante a la solución óptima. Ahora ya se trata de decidir si gastar mucho tiempo (y dinero) en encontrar la solución óptima o conformarse con obtener una solución aproximada con un algoritmo heurístico. Existen varios algoritmos rápidos para resolver el (PV). Presentamos aquí uno de ellos.

Algoritmo rápido para el problema del viajante (algoritmo del vecino más próximo). El algoritmo que daremos es similar, en cuanto a su construcción, a los algoritmos de Kruskal y Prim. Sea K_n el grafo completo de n vértices ponderado según la función de peso w. Construiremos un ciclo hamiltoniano C_n, paso a paso, de la siguiente forma:

1. Elegimos cualquier vértice como principio del ciclo C_1, consistente en un sólo vértice.
2. Dado el ciclo de k vértices C_k, $k \geq 1$, buscamos el vértice y_k, que no esté en C_k, más próximo a uno de los vértices, pongamos x_k, de C_k.
3. Sea C_{k+1} el ciclo de $k+1$ vértices que se obtiene insertando y_k inmediatamente antes de x_k en C_k.
4. Repetir los pasos 2 y 3 hasta tener un ciclo hamiltoniano.

Puede probarse que el peso total del ciclo hamiltoniano generado mediante este algoritmo es menor que dos veces el de peso mínimo.

Ejemplo 6.15.- *Aplicar el algoritmo rápido para el problema del viajante al grafo de 6 vértices cuya matriz de pesos es la siguiente:*

De \ A	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	3	2	7	3
2	3	∞	3	4	5	5
3	3	3	∞	1	4	4
4	2	4	1	∞	5	5
5	7	5	4	5	∞	4
6	3	5	4	5	4	∞

Comenzando con $C_1 = \{x_1\}$, obtenemos que el vértice más cercano a x_1 es x_4. Obtenemos así, el ciclo $C_2 = \{x_1 - x_4 - x_1\}$. Ahora, el vértice fuera de C_2 más cercano a uno de C_2 es x_3. El nuevo ciclo es $C_3 = \{x_1 - x_3 - x_4 - x_1\}$.

En el siguiente paso podemos optar por los vértices x_2 ó x_6. Elegimos x_2 para llegar al ciclo $C_4 = \{x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_1\}$. Seguimos aplicando el algoritmo para obtener el ciclo $C_5 = \{x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_6 - x_1\}$ y, finalmente, $C_6 = \{x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_1\}$ con un coste de 19 unidades, cantidad cercana a la solución óptima, que es un ciclo con un coste de 18 unidades. ¿Cuál es este ciclo óptimo? ■

Es evidente que podemos obtener distintos recorridos si empezamos en distintos vértices. Aún así, e incluso para grafos grandes, es más conveniente usar el algoritmo del vecino más próximo para cada vértice y luego considerar el más económico que utilizar un método de «fuerza bruta».

Existen otro tipo de algoritmos basados en la construcción de un árbol de decisión a partir de la matriz de pesos del grafo (c_{ij}), donde $c_{ij} = w(\{v_i, v_j\})$ si $i \neq j$ y $c_{ii} = \infty$. En este caso, se trata de encontrar una cota del peso total del ciclo en cada paso del algoritmo. Según sea la cota se procede de una forma o de otra. En cierto modo, se trata de una variante del algoritmo de Dijkstra.

6.6. Problemas resueltos

1. Prueba que todo árbol con dos o más vértices tiene al menos dos hojas (vértices de grado 1).

   Solución. Supongamos que no hay vértices de grado 1, es decir, $\delta(v) \geq 2$ para todo $v \in V$. Entonces, por el Teorema 6.1,

   $$2|V| - 2 = \sum_{v \in V} \delta(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V|,$$

   se llega a una contradicción. Si suponemos que hay un sólo vértice (llamémosle ω) de grado 1 y el resto tienen grado mayor o igual que dos, también se llega a una contradicción. En efecto,

   $$2|V| - 2 = \delta(\omega) + \sum_{v \neq \omega} \delta(v) \geq 1 + 2(|V| - 1) = 2|V| - 1. \blacksquare$$

2. Determina los árboles de n vértices con el menor y el mayor número de hojas.

   Solución. Por el ejercicio anterior, sabemos que todo árbol tiene como mínimo 2 hojas. Para determinar el árbol con el menor número de hojas, sean u y ω dichas hojas. Entonces,

   $$2n - 2 = \sum_{v \in V} \delta(v) = 1 + 1 + \sum_{v \neq u, \omega} \delta(v),$$

   luego

   $$\sum_{v \neq u, \omega} \delta(v) = 2(n - 2).$$

   La única forma de que se cumpla esta igualdad es que $\delta(v) = 2\ \forall v \neq u, \omega$. Por lo tanto el grafo buscado es el grafo lineal L_n.

   Busquemos ahora el árbol con mayor número de hojas. En primer lugar, notemos que no todos los vértices pueden ser hojas (si $\delta(v) = 1$ para todo v, no se cumpliría $2n - 2 = \sum_{v \in V} \delta(v) = n$). Sin embargo, sí que puede ocurrir que haya $n-1$ hojas. En este caso, calculamos el grado del vértice restante, ω:

   $$2n - 2 = \delta(\omega) + n - 1 \Rightarrow \delta(\omega) = n - 1.$$

   Se obtiene así un grafo en forma de estrella con $n - 1$ puntas. ■

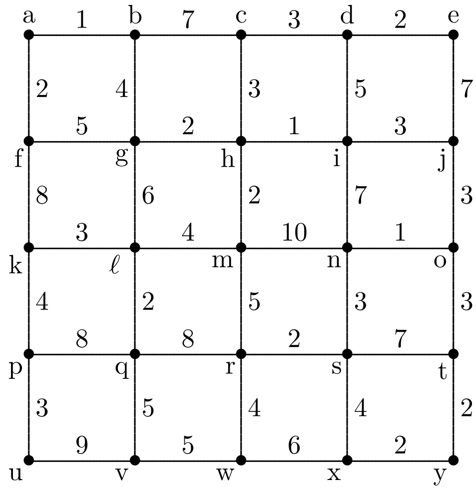


Figura 6.13: Grafo para el tercer problema resuelto.

3. Usa el algoritmo de Kruskal para encontrar un árbol generador minimal, así como su peso, en el grafo de la figura 6.13. ¿Cuántos árboles generadores minimales diferentes hay en dicho grafo?

Solución. Se trata de un grafo con 25 vértices, luego el árbol que buscamos contiene 24 aristas. Comenzamos añadiendo una a una las aristas de peso 1 (sin que se formen ciclos). Así, tras 3 pasos obtenemos el conjunto $K_3 = \{ab, hi, no\}$, de peso $\omega(K_3) = 3$. A continuación, añadimos las aristas de peso 2 sin que tampoco se formen ciclos. Después de 8 pasos más, llegamos al conjunto $K_{11} = \{ab, hi, no, de, af, gh, hm, lq, rs, ty, xy\}$, de peso $\omega(K_{11}) = 19$. Ahora, hay que añadir las aristas de peso 3 con cuidado de que tampoco se formen ciclos. Después de otros 8 pasos más, llegamos al conjunto

$$K_{19} = \{ab, hi, no, de, af, gh, hm, lq, rs, ty, xy,\\ cd, ch, ij, jo, kl, ns, ot, pu\},$$

de peso $\omega(K_{19}) = 43$. Al añadir las aristas de peso 4, observamos que la arista sx no se puede añadir pues se formaría un ciclo. Añadimos el resto y llegamos a

$$K_{23} = \{ab, hi, no, de, af, gh, hm, lq, rs, ty, xy, cd,\\ ch, ij, jo, kl, ns, ot, pu, bg, lm, kp, rw\},$$

de peso $\omega(K_{23}) = 59$. Para añadir la última arista, de peso 5, hay dos posibilidades, añadir qv o añadir vw. Se obtienen por tanto dos posibles árboles generadores minimales, ambos de peso 64:

$$T = \{ab, hi, no, de, af, gh, hm, lq, rs, ty, xy,\\ cd, ch, ij, jo, kl, ns, ot, pu, qv\}$$

$$T' = \{ab, hi, no, de, af, gh, hm, lq, rs, ty, xy,\\ cd, ch, ij, jo, kl, ns, ot, pu, vw\}$$

Mostramos ambos árboles en la figura 6.14. ∎

4. Utiliza los procedimientos de búsqueda en anchura y búsqueda en profundidad para ver si el grafo dado por la siguiente matriz de adyacencia es conexo o no. Dibuja los correspondientes árboles generadores.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

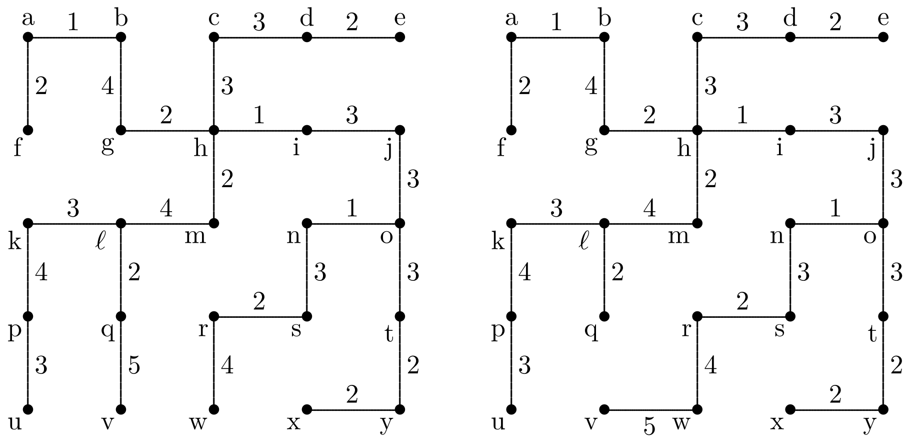


Figura 6.14: Grafos obtenidos por el algoritmo de Kruskal en el tercer problema resuelto.

Tabla 6.4: Tabla obtenida aplicando los procedimientos de búsqueda en anchura y búsqueda en profundidad en el cuarto problema resuelto.

vértice	adyacencias	v. activo	cola	v. activo	pila
v_1	$v_3v_6v_8$		$\boxed{v_1}$		$\boxed{v_1}$
v_2	$v_3v_5v_7$	v_1	$v_3v_6\boxed{v_8}$	v_1	$\boxed{v_3}v_6v_8$
v_3	$v_1v_2v_4$	v_8	$v_5v_7v_3\boxed{v_6}$	v_3	$\boxed{v_2}v_4v_6v_8$
v_4	$v_3v_5v_6v_7$	v_6	$v_4v_5v_7\boxed{v_3}$	v_2	$\boxed{v_5}v_7v_4v_6v_8$
v_5	$v_2v_4v_8$	v_3	$v_2v_4v_5\boxed{v_7}$	v_5	$\boxed{v_4}v_8v_7v_6$
v_6	v_1v_4	v_7	$v_2v_4\boxed{v_5}$	v_4	$\boxed{v_6}v_7v_8$
v_7	$v_2v_4v_8$	v_5	$v_2\boxed{v_4}$	v_6	$\boxed{v_7}v_8$
v_8	$v_1v_5v_7$	v_4	$\boxed{v_2}$	v_7	$\boxed{v_8}$
		v_8		v_8	

Solución. Ordenando los vértices $v_1, \ldots, v_8$ conforme a la matriz de adyacencias y eligiendo el vértice v_1 como raíz, obtenemos la tabla 6.4 donde se indica la evolución de la cola en el procedimiento de búsqueda en anchura y la evolución de la pila en el procedimiento de búsqueda en profundidad. En la construcción de la cola y de la pila se han seguido los procedimientos explicados en los ejemplos 6.9 y 6.8 respectivamente.

Tal vez sea conveniente aclarar cómo ha evolucionado la pila al pasar de v_2 a v_5 como vértice activo. La pila asociada a v_2 es $T = \{v_5, v_7, v_4, v_6, v_8\}$. El criterio de entrada y salida a la pila establece que v_5 será el siguiente elemento en abandonar la pila, pasando a ser el siguiente vértice activo. Al conjunto $\{v_7, v_4, v_6, v_8\}$ habrá que añadir los vértices adyacentes a v_5 que no hayan sido vértices activos anteriormente, es decir, v_4 y v_8. Pero ambos vértices están ya en el conjunto anterior, por lo que al añadirlos quedaría una pila con vértices repetidos del tipo $\{v_4, v_8, v_7, v_4, v_6, v_8\}$. En este caso, teniendo en cuenta la ordenación de la pila, se eliminan los vértices repetidos que estén más alejados de la salida de la pila. En nuestro caso, debemos eliminar los vértices que estén más a la derecha en el conjunto anterior. La nueva pila es, por tanto, $\{v_4, v_8, v_7, v_6\}$.

Los correspondientes árboles generadores obtenidos por estos procedimientos son los de la figura 6.15. ∎

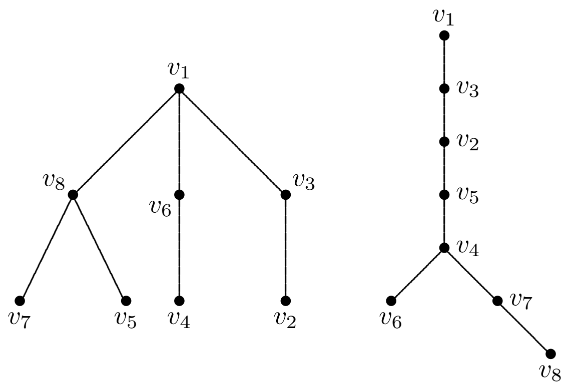


Figura 6.15: Grafos obtenidos por los procedimientos de búsqueda en profundidad y búsqueda en anchura en el cuarto problema resuelto.

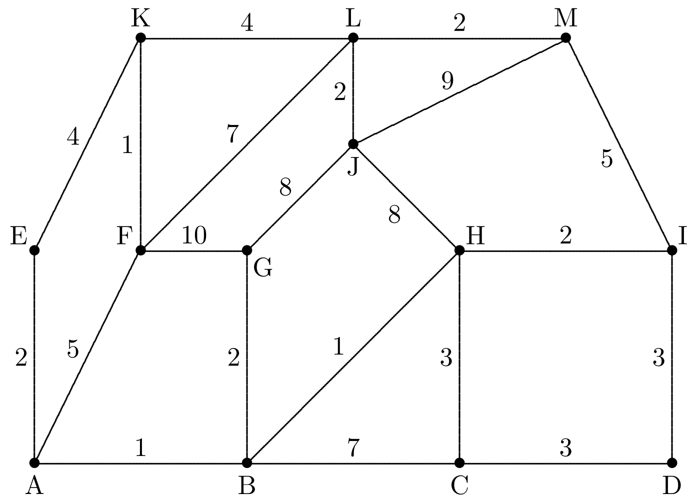


Figura 6.16: Grafos para el quinto problema resuelto.

5. Aplica el algoritmo de Dijkstra para encontrar el camino más corto entre el vértice A y el resto de vértices en el grafo de la figura 6.16.

   Solución. El algoritmo de Dijkstra da lugar a la tabla 6.5.

   De aquí, se puede contruir el árbol generador con los caminos de menor peso entre A y el resto de vértices, como el que se muestra en la figura 6.17.

   Notemos que la solución que hemos dado no es la única que tiene el problema. ■

Tabla 6.5: Tabla obtenida por el algoritmo de Dijkstra en el quinto problema resuelto.

v.a.	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
A	$\boxed{1}$	∞	∞	2	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
B		8	∞	$\boxed{2}$	5	3	2	∞	∞	∞	∞	∞
E		8	∞		5	3	$\boxed{2}$	∞ ∞	6	∞	∞	
H		5	∞		5	$\boxed{3}$		4	10	6	∞	∞
G		5	∞		5			$\boxed{4}$	10	6	∞	∞
I		$\boxed{5}$	7		5				10	6	∞	9
C			7		$\boxed{5}$				10	6	∞	9
F			7						10	$\boxed{6}$	12	9
K			$\boxed{7}$						10		12	9
D									10		12	$\boxed{9}$
M									$\boxed{10}$		11	
J											$\boxed{11}$	

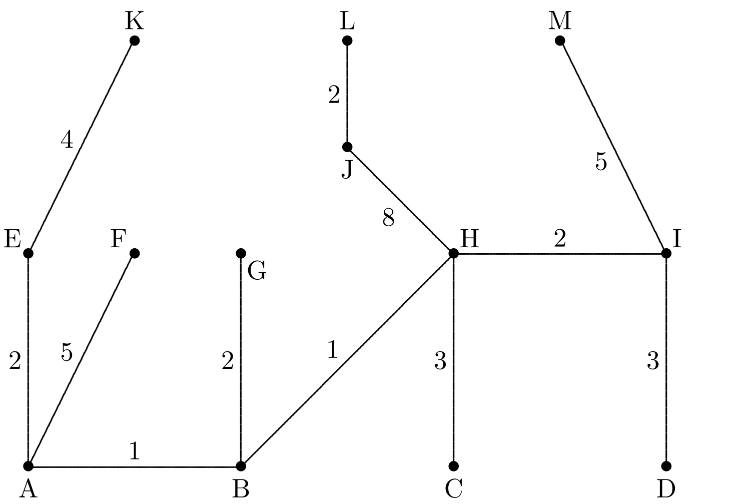
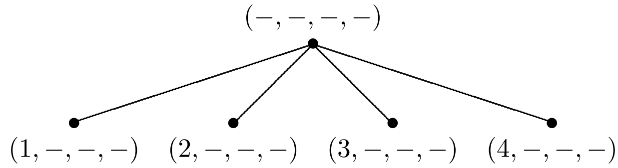


Figura 6.17: Uno de los árboles obtenidos por el algoritmo de Dijkstra en el quinto problema resuelto.

6. Utilizando una estructura en forma de árbol, resuelve el problema de colocar 4 reinas en un tablero de ajedrez de tamaño 4×4 sin que éstas se amenacen.

Solución. Podemos construir un árbol donde los vértices son cuaternas que indican la posición de la reina en cada fila. Así, la cuaterna $(1, 3, 2, 4)$ indica que en la primera fila tenemos una reina colocada en la primera casilla, en la segunda fila tenemos una reina colocada en la tercera casilla, en la tercera fila tenemos una reina colocada en la segunda casilla y en la cuarta fila tenemos una reina colocada en la cuarta casilla. Evidentemente, esta distribución no es una solución válida del problema pues las reinas así colocadas se amenazan entre sí.

Empezando con el tablero vacío (cuaterna $(-, -, -, -)$) vamos construyendo el siguiente árbol:



Analizando la parte de la izquierda del árbol, llegamos a las siguiente conclusiones:

a) Del vértice $(1, -, -, -)$ podemos pasar a $(1, 3, -, -)$ o también a $(1, 4, -, -)$. En el primer caso, se cierra la posibilidad de colocar una reina en la tercera casilla, luego por esta rama no se llega a ninguna solución. De $(1, 4, -, -)$ se pasa obligatoriamente a $(1, 4, 2, -)$ y ahora se cierra la posibilidad de colocar una reina en la cuarta casilla, por lo que por esta rama tampoco se llega a ninguna solución.

b) Del vértice $(2, -, -, -)$ se pasa obligatoriamente a $(2, 4, -, -)$. De aquí a $(2, 4, 1, -)$ y, finalmente, a $(2, 4, 1, 3)$, que es una solución del problema.

Del análisis de la parte derecha, se obtiene una nueva solución: $(3, 1, 4, 2)$. Por lo tanto, las dos únicas soluciones del problema son:

	Q		
			Q
Q			
		Q	

		Q	
Q			
			Q
	Q		

Obsérvese la simetría de las soluciones respecto a las diagonales del tablero de ajedrez. Obsérvese también que la segunda solución se obtiene girando 180° la primera solución.

En la siguiente tabla se muestra el número de soluciones, en función de las dimensiones del tablero de ajedrez $n \times n$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
Soluciones	1	0	0	2	10	4	40	92

■

6.7. Problemas propuestos

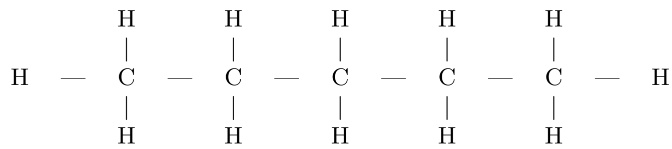
1. En la Química orgánica, una misma fórmula puede dar lugar a diferentes compuestos. Si tenemos un compuesto en forma de árbol formado por carbono (grado 4) e hidrógeno (grado 1), ¿existe alguna relación entre el número de átomos de carbono y el número de átomos de hidrógeno?

2. Demuestra que si un grafo tiene un número de aristas igual o superior al número de vértices, entonces no es un árbol.

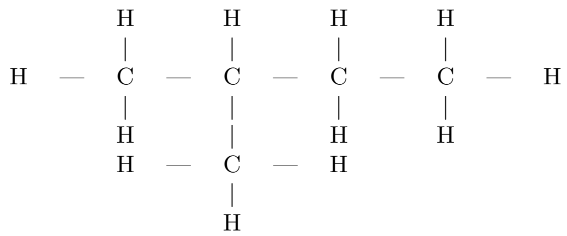
3. Sea T un árbol. Decimos que x es un vértice *centro* si el árbol que resulta al poner a x como raíz tiene altura mínima. Demuestra que un árbol T tiene a lo sumo dos centros.

4. El propano normal y el isopropano son dos isómeros (tienen la misma fórmula, C_5H_{12}) con las siguientes moléculas:

   Propano normal:

   Isopropano:

   Representa estas dos moléculas en forma de árboles, comprobando que no son isomorfas.

5. ¿Cuál es el máximo número de vértices en un árbol m-ario de altura h?

6. Cuenta el número de hojas en el juego de Nim (ejemplo 6.3).

7. Si un grafo es un árbol, ¿es plano? En caso afirmativo, ¿cuántas regiones tiene?

8. Se organiza un torneo de tenis con 32 jugadores, de forma que el cuadro de partidos se organiza en forma de árbol binario equilibrado (después de la primera ronda el número de jugadores que queda es una potencia de dos).

   a) Supóngase que los perdedores de las dos primeras rondas del torneo se clasifican para un torneo de perdedores T' ¿Cuántos jugadores jugarán el torneo T'?
   b) Supóngase que los jugadores que pierden en las dos primeras rondas de T' se clasifican para otro torneo de perdedores T''. ¿Cuántos jugadores jugarán el torneo T'' y cuántos serán eliminados en las dos primeras rondas?
   c) Supóngase que los perdedores de las dos primeras rondas de T'' se clasifican para otro torneo de perdedores y así sucesivamente hasta que al final queda el gran perdedor. ¿Cuántos torneos de perdedores son necesarios para determinar quién es el gran perdedor?

9. Tenemos 20 monedas de las que sabemos que a lo sumo hay una que es más ligera que el resto. ¿Cuántas pesadas son necesarias, como mínimo, para determinar si hay alguna moneda que pesa menos y, en el caso de que así fuera, cuál de ellas es? Calcula una solución para el valor mínimo de pesadas estimado.

10. Prueba, por inducción, que dadas 3^n monedas, una de ellas más ligera, se puede encontrar la moneda defectuosa en n pesadas.

11. Tenemos 4 monedas y sospechamos que una de ellas puede ser o más ligera o más pesada que el resto (las cuatro pueden ser iguales).

    a) Prueba que, dada una moneda adicional patrón, es posible en dos pesadas determinar si alguna de las monedas es defectuosa y, en caso de haber una, cuál es y si es más pesada o más ligera que el resto.

b) Prueba que dos pesadas no bastan si no disponemos de una moneda patrón.

c) Si tenemos 13 monedas y se da una moneda patrón, da un proceso que determine en tres pesadas si alguna de las monedas es defectuosa y, en caso de haber una, cuál es y si es más pesada o más ligera que el resto.

12. Calcula el número de árboles generadores diferentes de los grafos lineal L_n, ciclo C_n y completo K_n.

13. Calcula el número de árboles generadores diferentes de los grafos bipartidos $K_{2,n}$ y $K_{3,n}$.

14. Sea G un grafo conexo regular de grado k y sea h la altura del árbol generado por BA con raíz en un vértice de G. Demuestra que el número de vértices de G es, a lo sumo,

$$1 + k + k(k-1) + k(k-1)^2 + \ldots + k(k-1)^{h-1}.$$

15. Halla el camino más corto de A a F en el grafo ponderado dado por la tabla

	A	B	C	D	E	F
A	–	5	8	3	4	9
B		–	6	1	5	4
C			–	3	9	2
D				–	4	6
E					–	3

16. Sea G el grafo definido por la siguiente tabla de adyacencias

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
b	a	d	a	a	b	d	e	g	k	e
c	f	a	c	d	e	e	g	h	h	f
d	e		g	b	k	h	i	j	i	h
e			e	f		i	j			j
				g			k			
				k						
				h						

a) Usa el algoritmo de búsqueda en profundidad para construir un árbol de búsqueda con raíz en g. Muestra la evolución de la pila.

b) Usa el algoritmo de búsqueda en anchura para construir un árbol de búsqueda con raíz en c. Muestra la evolución de la cola.

17. Aplica el algoritmo rápido para el problema del viajante al grafo de 6 vértices cuya matriz de pesos es la siguiente:

De \ A	1	2	3	4	5	6
1	–	18	15	21	19	9
2	–	–	17	20	17	14
3	–	–	–	16	23	22
4	–	–	–	–	12	24
5	–	–	–	–	–	13

18. Aplica el algoritmo del vecino más próximo para encontrar un recorrido que nos permita salir de Logroño, visitar (en cualquier orden) Madrid, Sevilla, Valencia, Barcelona, Zaragoza, Bilbao, Oviedo y La Coruña y volver a Logroño. Comprobar si el recorrido obtenido es óptimo o no.

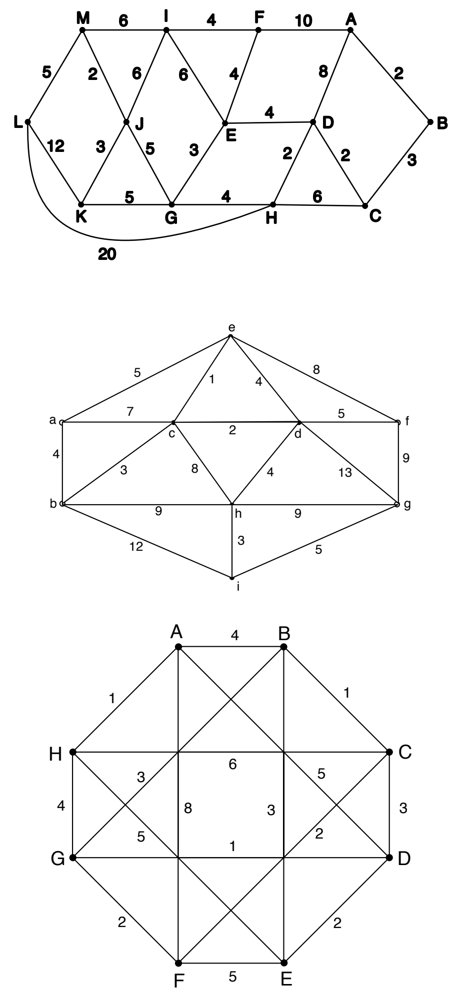


Figura 6.18: Grafos para el problema 20.

19. Una empresa puede realizar seis tipos de tareas. Cada tarea requiere una adaptación de las máquinas. El coste c_{ij} de adaptar las máquinas para pasar de la tarea i a la j viene dado por la siguiente matriz de costes (en miles de euros)

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	–	3	2	2	6	5
2	–	–	1	2	3	4
3	–	–	–	8	4	2
4	–	–	–	–	2	3
5	–	–	–	–	–	5

Encuentra la secuencia de producción que minimiza los costes.

20. Para los grafos de las figuras 6.18 y 6.19,determina:

a) el árbol generador minimal e indica si es único,

b) el camino más corto entre el vértice A y el resto de vértices.

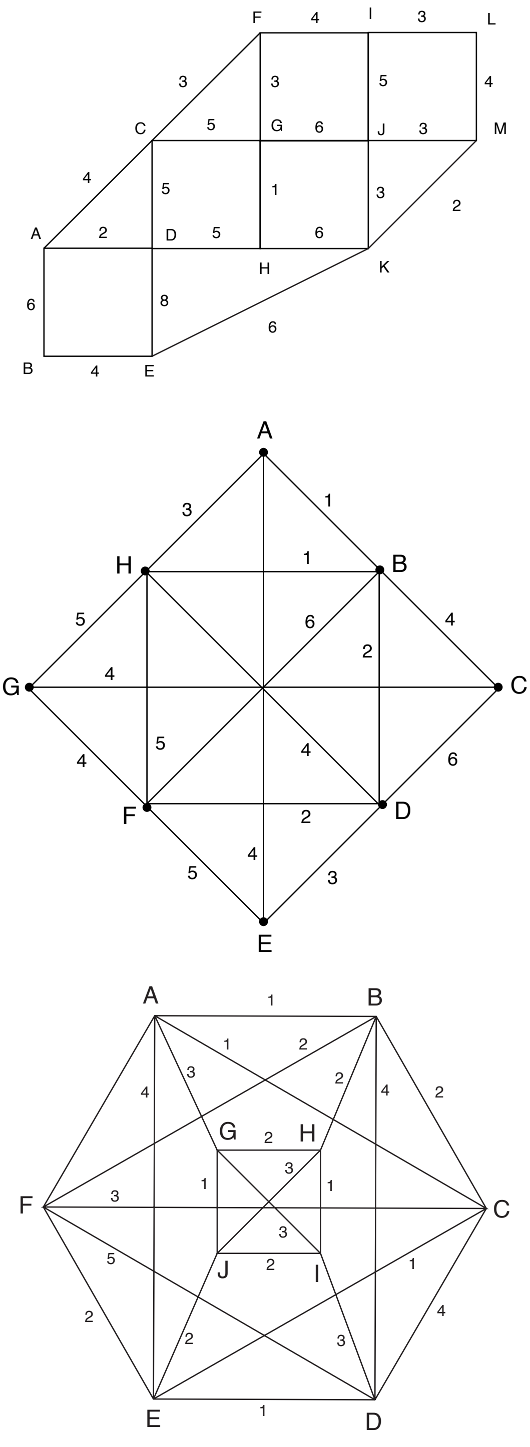


Figura 6.19: Otros grafos para el problema 20.

Bibliografía

[1] V. Álvarez, P. Fernández y M. A. Márquez: Cartomagia matemática y cartoteoremas mágicos. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* **5** (2002), n.º 3, 711–735.

[2] N. L. Biggs: *Discrete Mathematics.* Oxford University Press, Oxford, 2002.

[3] E. Bonsdorff, K. Fabel y O. Riihimaa: *Ajedrez y Matemáticas.* Martínez Roca, Barcelona, 1987.

[4] F. J. Cirre: *Matemática discreta.* Colección Base Universitaria, Anaya, Madrid, 2004.

[5] COMAP, Consortium for Mathematics and its Applications: *Las Matemáticas en la vida cotidiana.* Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 1999.

[6] F. Comellas, J. Fàbrega, A. Sànchez y O. Serra: *Matemática discreta.* Edicions UPC, Barcelona, 2001.

[7] J. Conway y R. Guy: *The book of numbers.* Copernicus (Springer-Verlag), Nueva York, 1996.

[8] L. R. Foulds: *Graph Theory Applications.* Springer-Verlag, Nueva York, 1999.

[9] C. García Amengual: *Matemàtica Discreta.* Universitat de les Illes Balears, Palma, 2005.

[10] F. García Merayo: *Matemática discreta.* Thomson, Madrid, 2005.

[11] C. García, J. M. López y D. Puigjaner: *Matemática Discreta. Problemas y ejercicios resueltos.* Prentice Hall, Madrid, 2006.

[12] G. Gbevergbese: *La cresta del pavo real: Las matemáticas y sus raíces no europeas.* Pirámide, Madrid, 1996.

[13] R. L. Graham, D. E. Knuth y O. Patashnik: *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994.

[14] R. P. Grimaldi: *Matemáticas discreta y combinatoria. Una introducción con aplicaciones* Prentice Hall, México, 1998.

[15] K. Kalmanson: *An introduction to Discrete Mathematics and its applications.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1986.

[16] D. E. Knuth: *El arte de programar ordenadores: Algoritmos fundamentales.* Reverté, Barcelona, 1986.

[17] D. E. Knuth: *El arte de programar ordenadores: Clasificación y búsqueda.* Reverté, Barcelona, 1986.

[18] D. E. Knuth: *The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 4, Generating All Trees–History of Combinatorial Generation.* Addison Wesley & Prentice Hall, Upper Saddle Rive, New Jersey, 2006.

[19] L. Lovász, J. Pelikán y K. Vesztergombi: *Discrete Mathematics. Elementary and beyond.* Springer-Verlag, Nueva York, 2003.

[20] S. B. Morris: *Magic tricks, card shuffling and dynamic computer memories.* The Mathematical Association of America, 1998.

[21] O. Ore: *Grafos y sus aplicaciones.* Colección la tortuga de Aquiles, Proyecto EULER, Madrid, 1995.

[22] R. Penrose: *El camino a la realidad.* Debate, Barcelona, 2006.

[23] K. H. Rosen: *Matemática discreta y sus aplicaciones.* McGraw-Hill, Madrid, 2004.

[24] A. Tucker: *Applied Combinatorics.* John Wiley & Sons, Nueva York, 1995.

[25] H. S. Wilf: *Generatingfunctionology.* Academic Press, Boston, 1990 (accesible online: `www.math.upenn.edu/~wilf/gfology2.pdf`).

Direcciones electrónicas

[26] Wikipedia, la enciclopedia libre, Matemática discreta:
`http://es.wikipedia.org/wiki/Matemática_discreta`

[27] Wikipedia, the free encyclopedia, Discrete mathematics:
`http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_mathematics`

[28] Wolfram Mathworld, Discrete mathematics:
`http://mathworld.wolfram.com/topics/DiscreteMathematics.html`

[29] Página personal de Frazer Jarvis, Universidad de Sheffield, Mathematics of Sudoku:
`http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudoku.pdf`

[30] Wikipedia, the free encyclopedia, Mathematics of Sudoku:
`http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_Sudoku`

[31] Georgia Institute of Technology, The Traveling Salesman Problem:
`http://www.tsp.gatech.edu/`